

# 基于最优传输理论的高质量点云重采样方法

蔡钦镒<sup>1,2)</sup> 陈中贵<sup>1)\*</sup> 曹娟<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(厦门大学信息学院 厦门 361005)

<sup>2)</sup>(厦门大学数学科学学院 厦门 361005)

**摘要** 目前通过 3D 扫描仪获取的点云仍旧存在一些缺陷: 点云含有噪声, 点云在不同方向上分布不均匀等. 本文针对上述问题开展研究. 主要工作为提出一种新的算法用于在点云上进行高质量的重采样, 即使用较为稀疏的重采样点集去表达较为密集的原始点云的几何形状, 同时重采样点集的分布可以满足用户预先指定的目标分布, 并具备一定的蓝噪声性质. 在最优传输理论的基础之上, 本文方法将传统的点云重采样问题转化为一个最优化问题, 并在点云上构建离散网格, 使得针对网格的受限制的 Power 剖分方法能够迁移至点云上. 随后利用交叉优化框架对该优化问题进行求解, 并对每一个重采样点执行精确的容积约束. 大量实验结果表明, 本文算法输出的重采样点集可以实现精确自适应控制密度的目标, 并且具备较好的蓝噪声性质.

**关键词** 点云重采样; 最优传输; 受限制的 Power 图; 重心 Voronoi 剖分

**中图法分类号** TP391

## High-Quality Point Cloud Resampling Method Based on Optimal Transport Theory

Cai Qinyi<sup>1,2)</sup> Chen Zhonggui<sup>1)\*</sup> Cao Juan<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(School of Informatics, Xiamen University, Xiamen 361005)

<sup>2)</sup>(School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005)

**Abstract** Point clouds obtained through 3D scanners have some defects: the point clouds may contain noise, and the points are unevenly distributed in different directions. In this paper, we carry out research to deal with the above problems. The main contribution is to propose a new algorithm for performing high-quality resampling tasks on point clouds, that is, using a sparse set of resampling points to represent the geometric shape of the original dense point cloud. The distribution of the resampling points conforms to a target distribution specified by the user in advance, and has certain blue noise properties. Based on the optimal transport theory, the traditional point cloud resampling problem can be transformed into an optimization problem, and a discrete mesh can be constructed on the point cloud, so that the restricted power tessellation on surfaces can be applied to point clouds. Then we solve the optimization problem by using an interleaving optimization framework and enforce an exact capacity constraint for each resampling point. A large number of experiments show that the resampling point sets generated by our algorithm conform precisely to the target density function, and show good blue noise properties.

**Key words** Point Cloud Resampling; Optimal Transport; Restricted Power Diagram; Centroidal Voronoi Tessellation

本课题得到国家自然科学基金(61872308, 61972327)、福建省自然科学基金(2019J01026)、虚拟现实技术与系统国家重点实验室(北京航空航天大学)开放课题基金(VRLAB2021B01)、中央高校基本科研业务费专项基金(202720190011, 202720190063)资助. 蔡钦镒, 硕士, 主要研究领域为计算机图形学. E-mail: CaiQiniyi@foxmail.com. 陈中贵(通讯作者), 博士, 教授, CCF高级会员, 主要研究领域为计算机图形学、数字图像处理. E-mail: chenzhonggui@xmu.edu.cn. 曹娟, 博士, 副教授, CCF高级会员, 主要研究领域为CAGD&CG. E-mail: juancao@xmu.edu.cn.

## 1 引言

3D 扫描<sup>[1]</sup>是采集这个真实世界的物体或周围环境的形状、颜色等数据的技术，采集到的数据通常以点云的形式呈现，用来创建数字化的三维模型。点云数据可以应用于各种下游产业，如基于点云的渲染<sup>[2]</sup>、医疗图像、动画<sup>[3]</sup>、三维重建<sup>[4-6]</sup>等领域。然而目前采集的点云数据一般是无法直接被下游领域的算法所利用的，因为存在着几个目前难以克服的问题：数据较为冗余，数据残缺，含有噪声以及丢失了整体的结构信息等。如在基于点云的重建领域当中，若输入点云杂乱无章，则重建结果容易出现许多非流形结构，这在实际应用中是难以接受的。因此需要对点云的质量进行优化，目前常用的思路便是对点云数据进行重采样。

在很多图形应用中都需要将重采样后的高质量点集作为算法输入，基于不同原理的重采样技术也相继问世。其中，基于整合原理的点云重采样技术是通过去除噪声和离群点，将点推回到原始点云所表示的曲面上的一种重采样技术，它可能会改变重采样点集  $Q$  在原始点云  $P$  中的布局，即  $Q \not\subset P$ ，但  $|Q| = \rho |P|$ ，其中  $\rho$  指采样率。2007 年，Lipman 等<sup>[7]</sup>提出了局部最佳投影算子 (Locally Optimal Projection, 简称 LOP 算子)，用已生成的点集表示的隐藏曲面可以较好地逼近原始点云所表示的隐藏曲面。因为 LOP 算子不依赖于局部几何量的计算或估计，因此该算法具有较强的抗噪能力。2009 年时，由于 LOP 算子在原始点云分布不够均匀时表现不佳，Huang 等<sup>[8]</sup>又将 LOP 算子推广为加权局部最佳投影算子 (Weighted Locally Optimal Projection, 简称 WLOP 算子)，该算子在目标函数中考虑了原始点云中每一个点的权重，其中每一个点的权重与在原始点云中该点处的点云密度大小有关，从而降低了原始点云分布不均匀对结果的影响。总的来说，LOP 算子及其变种都需要在足够稠密的点云上执行，且它们容易受到原始点云非均匀分布的影响。此外，它们通常以均匀分布为目标，对重采样点的密度分布没有额外控制。另外一方面，基于  $L_0$  范数优化的点云重采样算法则提高了对噪声的鲁棒性以及保持特征的能力。2019 年，Cheng 等<sup>[9]</sup>提出了一种在  $L_0$  最小化框架下的重采样方法来处理包含噪声的点云数据，并利用交替优化的技巧进一步提高了重采样算法的运行效率。

除了上述提及的算法理论基础之外，重心 Voronoi 剖分 (Centroidal Voronoi Tessellation, 简称 CVT) 也在点云重采样领域得到了广泛应用。这类算法通过将一个张量场和一个  $L_p$  范数整合到 CVT 的能量函数当中去，最终经过优化后得到一个服从各向同性或各向异性分布的结果，如 2018 年 Chen 等<sup>[10]</sup>通过 Lloyd 算法<sup>[11]</sup>在点云上计算 CVT，并利用得到的 CVT 进行点云重采样。然而，基于 CVT 的算法并不能精确控制重采样点集的分布密度。 $k$ -means 算法等基于离散的 CVT 的算法虽然实现简单，但很大程度上会受到原始数据非均匀分布的影响。另外一方面，将点云看作粒子，通过引入粒子之间的作用力或者能量来进行点云重采样也是近年的一种重要研究思路。如 2019 年 Zhong 等<sup>[12]</sup>定义了一类高斯核函数来模拟粒子间的能量，并能够得到各向同性或者各向异性的重采样结果。

近年来，生成具有蓝噪声性质的点集也是点云重采样领域的一个重要研究方向。在 2012 年，Goes 等<sup>[13]</sup>提出了一种能够在二维平面上快速生成服从任意自定义分布的蓝噪声点集，其核心是利用带容积约束的 Voronoi 剖分 (Capacity Constrained Voronoi Tessellation, 简称 CCVT<sup>[14]</sup>) 求解一个最优传输问题<sup>[15]</sup>。在 2017 年，Qin 等<sup>[16]</sup>引入熵正则项，将采样问题转化为最优化问题，使得采样结果的可控性更高。而在 2018 年，Luo 等<sup>[17]</sup>另辟蹊径，提出了一种基于高斯加权的图 Laplacian 的点云重采样算法，该算法能够使得生成的蓝噪声点集的分布与目标分布几乎保持一致。

本文提出了一种基于 CCVT 的算法，用于进行点云的重采样工作，生成的重采样点集具备较好的蓝噪声性质，且点集分布服从用户指定的目标分布（均匀分布或者非均匀分布）。本文算法是 Goes 等<sup>[13]</sup>提出的算法在二维流形上采集得到的点云上的推广，能够严格执行用户指定的容积约束。我们将点云的重采样问题通过最优传输理论转化为一个最优化问题，并详细推导了其梯度与 Hessian 矩阵。实验结果证明，本文的算法表现不劣于其它经典有效的算法，且在容积约束方面远优于其它算法。

本文的主要贡献在于在点云上利用 CCVT 方法与最优传输理论生成具有蓝噪声性质的重采样点集；能够使重采样点集的分布服从用户指定的目标分布；推导了目标函数在点云上的梯度及 Hessian 矩阵。

## 2 点云的高质量重采样模型

### 2.1 目标函数的提出

采样是指从连续空间中得到一个离散点集的过程，而本文算法的目标则是从离散的原始点云上重采样得到点集  $\{x_i\}_{i=1}^n$ ，它满足等容积的限制。即对于每一个点  $x_i$ ，本文算法希望控制其受限制的 Power 胞腔(Restricted Power Cell, 简称 RPC) 的容积使其与其它点的 RPC 容积一致。从数学形式上讲，我们需要极小化下述能量函数，使其满足各个重采样点  $x_i$  的 RPC(记为  $P_i$ ) 容积相同的限制<sup>[18]</sup>，

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X, W) &= \sum_{i=1}^n \int_{P_i} \rho(x) \|x - x_i\|^2 dx, \\ \text{s.t. } m_i &= \int_{P_i} \rho(x) dx = m, i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $X$  表示重采样点集  $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ ， $W$  表示 Power 图的权重集  $W = \{w_i\}_{i=1}^n$ ， $X$  与  $W$  共同决定了受限制的 Power 图(Restricted Power Diagram, 简称 RPD) 的生成； $m_i$  表示重采样点  $x_i$  的 RPC 上的容积， $m$  是一个常数，表示各个重采样点的 RPC 的目标容积。能量函数  $\mathbf{E}(X, W)$  是一个经典的 CVT 能量函数形式<sup>[10]</sup>，区别只是积分区域从受限制的 Voronoi 胞腔(Restricted Voronoi Cell, 简称 RVC)  $V_i$  换成了  $P_i$ 。

可以证明，该目标函数的极小化问题也是一种最优传输问题，其极小值点总是存在<sup>[19]</sup>且具备蓝噪声性质<sup>[13-14]</sup>。其中，约束条件表明局部区域的点的密度与  $\rho(x)$  呈正相关关系。而单纯地极小化能量函数则表明输出点集的分布会倾向于各向同性分布，因为这样的分布将使得能量函数(运输成本) 最小化。因此，该极小化问题的极小值点提供了一个密度自适应的且各向同性的点的分布。

结合拉格朗日乘数法及其梯度性质<sup>[13]</sup>，本文将目标函数(式(1)) 转化为下述形式：

$$\mathbf{F}(X, W) = \sum_{i=1}^n w_i(m_i - m) - \mathbf{E}(X, W). \quad (2)$$

这也是本文最终采用的目标函数形式。

### 2.2 目标函数的定义域

本文在输入的原始点云上构建离散网格，使得点云上的 RPD 计算成为可能，并将得到的 RPD 作为目标函数的定义域。

**定义 1** 本文定义的点云上的离散网格  $M$  是一种三角网格，为点云中每个点的局部最佳估计网格  $M_i$  的集合，即  $M = \bigcup_{i=1}^n M_i$ 。单个点  $x_i$  的局部最佳

估计网格  $M_i$  的定义如下：

$$M_i = f(S_i \cap \{x | \|x - x_i\|_2 \leq r_i\}), \quad (3)$$

其中  $S_i$  表示点  $x_i$  的局部最佳估计曲面，是由距离点  $x_i$  最近的  $k$  个点利用最小二乘法生成的最佳拟合二次曲面； $\{x | \|x - x_i\|_2 \leq r_i\}$  表示以点  $x_i$  为球心， $r_i$  为半径的球体；则  $S_i \cap \{x | \|x - x_i\| \leq r_i\}$  相当于将点  $x_i$  对应的最佳拟合曲面进行边界切割，使其不会无限延展；最后，我们得到经切割的局部最佳拟合曲面以后，还需要进行三角网格化，我们用  $f$  来表示该网格化过程。具体过程详见 3.3 节。

### 2.3 目标函数的梯度及 Hessian 矩阵

我们推导出关于重采样点的权重  $W = \{w_i\}_{i=1}^n$  和重采样点的位置  $X = \{x_i\}_{i=1}^n$  的梯度为

$$\begin{aligned} \nabla_{w_i} \mathbf{F}(X, W) &= m_i - m, \\ \nabla_{x_i} \mathbf{F}(X, W) &= 2m_i(b_i - x_i), \end{aligned} \quad (4)$$

其中  $b_i = \frac{1}{m_i} \int_{P_i} x \rho(x) dx$  是重采样点  $x_i$  的 RPC 的几何重心。推导过程详见附录。同时我们还通过详细推导求得目标函数  $\mathbf{F}(X, W)$  关于重采样点的权重  $w_i$  的 Hessian 矩阵为

$$\begin{aligned} [H_{\mathbf{F}}]_{ij} &= -\frac{\overline{\rho_{ji}}}{2} \sum_{l \in T_{ji}} \frac{|e_{ji}^* \cap \tau_l|}{|e_{ji}|_{\tau_l}} + \\ &\sum_{k \in \Omega_j, k \neq i} \left( -\frac{\overline{\rho_{jk}}}{2} \sum_{l \in T_{jk}} \frac{|e_{jk}^* \cap \tau_l|}{|e_{jk}|_{\tau_l}} + -\frac{\overline{\rho_{kj}}}{2} \sum_{l \in T_{kj}} \frac{|e_{kj}^* \cap \tau_l|}{|e_{kj}|_{\tau_l}} \right), \quad (5) \\ [H_{\mathbf{F}}]_{ii} &= -\sum_{j \in \Omega_i} [H_{\mathbf{F}}]_{ij}, \end{aligned}$$

其中， $e_{ij}$  是为连接  $x_i$  和  $x_j$  的边； $e_{ij}^*$  为关于  $x_i$  和  $x_j$  的等分面； $|e_{ij}|_{\tau_l}$  为  $e_{ij}$  在三角形  $\tau_l$  上的投影长度； $T_{ij}$  为等分面  $e_{ij}^*$  相交的三角形的指标集； $\overline{\rho_{ij}}$  为密度函数在  $e_{ij}^* \cap M$  上的平均值； $\Omega_i$  为  $x_i$  所有 1-邻域点的指标集。

## 3 点云重采样问题的数值优化算法

### 3.1 算法流程总览

本文算法的目标是给定较为粗糙的原始点云  $\{p_i\}_{i=1}^m$  ( $m$  的大小一般在几十万到几百万之间) 与用户期望的输出点数  $n$  作为输入，输出能够符合用户指定分布的高质量蓝噪声点集。其中，用户指定的分布既可以是均匀分布，亦可以是非均匀分布。算法的流程图如图 1 所示。

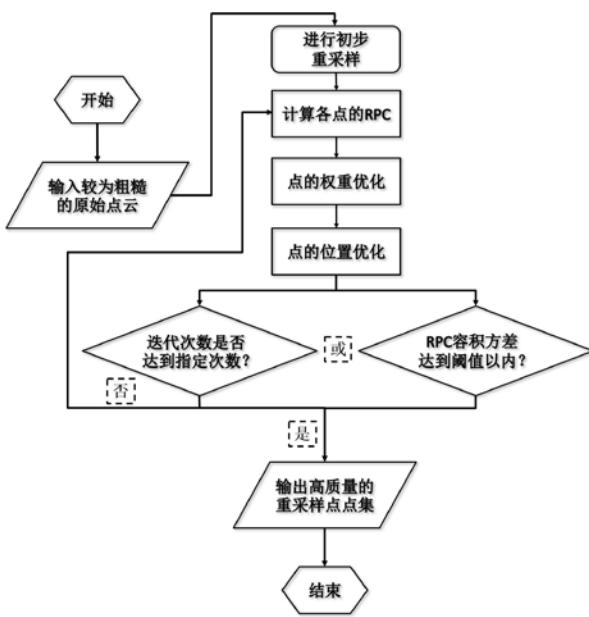


图 1 基于最优传输理论的重采样算法流程图

算法的流程简述如下：

- (1) **初步重采样阶段.** 首先从原始点云上随机重采样  $n$  个点，随后构建受限制的 Voronoi 图 (Restricted Voronoi Diagram, 简称 RVD) 对初步重采样的结果进行处理.
- (2) **计算各点的 RPC.** 对于经上述步骤得到的每一个重采样点  $x_i$ ，根据  $x_i$  在  $\{p_i\}_{i=1}^m$  中的若干个邻居点计算一个局部的最佳估计曲面，从而得到其 RPC.
- (3) **权重优化.** 利用阻尼牛顿法求解一个稀疏线性方程组，同时利用回溯线搜索更新各个重采样点  $x_i$  的权重，直至所有 RPC 容积的方差小于阈值.
- (4) **位置优化.** 计算每个 RPC 的重心，并将对应的  $x_i$  移至其 RPC 重心处.
- (5) 重复执行第二步到第四步，直至迭代次数达到用户预先指定的次数或者所有 RPC 容积的方差小于一定的阈值，输出最终的重采样点集.

### 3.2 初步重采样

本文算法一开始是从原始点云中随机重采样  $n$  个点，这个操作容易受原始点云分布的影响，导致得到的点集密度与目标密度存在较大差异，从而使得重采样点的位置优化变得困难。为了加速后续迭代算法的收敛，本文利用 RVD 在随机重采样以后进行了简单的后处理操作<sup>[10]</sup>，即

- (1) 对于每个重采样点，我们利用其若干个邻居点计算其最小二乘拟合平面，在此基础上得到 RVD；
- (2) 基于目标密度函数计算的 RVC 加权面积重新采

样，每个 RVC 上采样的点的个数和 RVC 的加权面积成正比；

- (3) 随后执行 3-4 步 Lloyd 迭代以获得更好的初始点集分布，期间不断地更新 RVD.

### 3.3 RPD 的计算

本文算法的优化框架中主要分为初始重采样，交替进行权重与顶点的优化等步骤，这些步骤均依赖于 RPD 的计算。其计算过程如下。

- (1) 计算局部最佳估计网格  $M_i$ 。计算受限制的局部最佳估计曲面  $\tilde{S}_i$ ，然后将  $\tilde{S}_i$  进行网格化得到局部最佳估计网格  $M_i$ 。
- (2) 计算 RPC。利用  $x_i$  与其在重采样点集中的若干个 1-邻域点的等分面，利用[20]中的并行算法，对局部最佳估计网格  $M_i$  进行切割，得到  $x_i$  对应的  $P_i$ 。

### 3.4 权重优化

#### 3.4.1 阻尼牛顿法优化

在开始权重优化之前，我们会固定所有重采样点  $x_i$  的位置，并初始化其权重  $w_i$  为 0。权重优化的目的是使得所有 RPC 的容积都尽可能相同。主要思路是对目标函数  $F(X, W)$  采用阻尼牛顿法求其极小值，其优化变量为所有权重列排而成的向量  $W = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ 。对于固定的  $\bar{X} = \{x_i\}_{i=1}^n$ ，目标函数关于权重  $W = \{w_i\}_{i=1}^n$  的驻点是目标函数的极值点<sup>[21]</sup>。本文采用的阻尼牛顿法迭代格式为

$$W_{k+1} = W_k - t D_W = W_k - t H_F^{-1} \nabla_W F, \quad (6)$$

其中  $t$  是第  $k$  次迭代的下降步长， $D_W = H_F^{-1} \nabla_W F$  是相应的下降方向。每一次为了求得  $D_W$ ，我们都需要去求解下述的稀疏线性方程组：

$$H_F D_W = (m_1 - m, m_2 - m, \dots, m_n - m)^T. \quad (7)$$

实验中发现系数矩阵  $H_F$  通常是高度病态与非满秩的，这对于 RPD 的计算精度与稳定性提出了更高的要求。在程序上，我们采用了专门用于求解稀疏线性系统的 C++ 库 SuiteSparse，可帮助我们稳定求得方程组的最小范数最小二乘解。

#### 3.4.2 回溯线搜索

本文采用带有 Armijo 条件<sup>[22]</sup>的回溯线搜索计算步长  $t$ ，其数学形式如下所示：

$$\begin{aligned} F(\bar{X}, W_k + t H_F^{-1} \nabla_W F) &\leq F(\bar{X}, W_k) + \\ &\alpha t (\nabla_W F)^T H_F^{-1} \nabla_W F, \end{aligned} \quad (8)$$

实验中常取  $\alpha = 10^{-4}$ 。在进行回溯线搜索时我们设定了两个停止条件：

(1) 随着搜索步数  $k$  的增加, 步长  $t$  也会以  $t = \beta t$  的速率进行衰减, 其初始值为 1, 通常取  $\beta$  为 0.5. 当步长  $t$  能够使得不等式(8)成立或者达到搜索次数上限时, 则立即停止回溯线搜索.

(2) 目标函数  $\mathbf{F}(X, W)$  相对于任意权重  $w_i$  的梯度应小于用户预先指定的阈值, 即

$$\|\nabla_{w_i} \mathbf{F}(\bar{X}, W)\|_{H_F^{-1}} \leq \varepsilon, \quad (9)$$

其中  $\|\nabla_{w_i} \mathbf{F}(\bar{X}, W)\|_{H_F^{-1}} = \sqrt{(\nabla_W \mathbf{F})^T H_F^{-1} \nabla_W \mathbf{F}}$ .

此外, 在目标函数值需要尽可能下降的前提下, 我们还添加了下述两个条件:

(3) 由于 RPD 直接影响到 Hessian 矩阵  $H_F$ , 当 RPD 无法较好地覆盖原始点云表示的隐藏曲面时, 此时  $H_F$  无法满秩, 从而影响求解迭代, 因此我们希望  $H_F$  尽可能满秩. 实验中若迭代过程出现  $H_F$  的秩小于  $0.9 \times n$  的情况, 则停止当前线搜索.

(4) 由于需要极小化目标函数  $\mathbf{F}(X, W)$ , 其第一项  $\sum_{i=1}^n w_i(m_i - m)$  应尽可能小, 等价于所有 RPC 的方差也应尽可能小. 因此, 我们还要求在每一次回溯线搜索当中所有 RPC 容积的方差下降.

### 3.5 位置优化

顶点位置优化的过程则较简单. 由于目标函数关于  $\mathbf{F}(X, W)$  位置的梯度为  $\nabla_{x_i} \mathbf{F}(X, W) = 2m_i(b_i - x_i)$ , 因此本文直接将  $x_i$  移至对应的 RPC 重心即可使其对应梯度为 0. 每一次的位置优化都会降低  $\mathbf{F}(X, W)$  的值, 从牛顿法的角度看, 位置优化会使得算法跳出  $\mathbf{F}(X, W)$  的局部极小值, 进而寻找到更优的  $\mathbf{F}(X, W)$  极值点. 更新  $x_i$  的位置后, 我们需要为所有  $x_i$  重新生成对应的局部最佳估计网格.

## 4 结果展示与分析

本节会展示本文的算法结果, 并与一些经典有效的算法在各个衡量指标上进行结果比较. 我们使用 CGAL<sup>[23]</sup> 计算点云曲率; 利用开源的 C++ 库 Geogram<sup>[24]</sup> 进行 RPD 的计算. 本文算法的所有实验都是并行运行在一台装载有型号为 E3-1225 v3, 3.20GHz 的 CPU(四核心四线程), 12GB 内存的 PC 机上的. 所有的实验模型都进行了归一化处理.

### 4.1 衡量指标

为了使得结果的比较更加客观, 本文需要对重采样结果进行量化评价, 主要基于以下几点衡量指标. 我们先定义  $C_i$  与  $C$  两个向量, 其中  $C_i$  的每一个分量为重采样点  $x_i$  的 RPC 的容积  $m_i = \int_{P_i} \rho(x) dx$ ,  $C$  是分量全为重采样点的 RPC 的目标容积  $m = \int_P \rho(x) dx / n$  的向量,  $P$  表示 RPD.

#### 4.1.1 RPC容积的相关指标

我们将任意重采样点的 RPC 的容积看成是一个估计量, 则所有重采样点的 RPC 容积共同构成一个大小为  $n$  的样本集. 那么, 接下来就可以用统计学的语言, 即无偏性和有效性两个指标去衡量本文算法对重采样点的 RPC 容积的控制效果.

(1) RPC 容积的无偏性: 我们计算  $L_2$  相对误差, 它被定义为  $\|C_i - C\|_2 / \|C\|_2$ , 若该相对误差小于一定阈值, 则说明本文结果具备一定的无偏性.

(2) RPC 容积的有效性: 我们计算所有 RPC 容积的方差. 方差愈小, 各点的 RPC 容积愈趋于一致, 即说明本文结果具备一定的有效性, 从而能够根据用户指定的目标密度函数  $\rho(x)$  自适应控制密度.

#### 4.1.2 功率谱

功率谱是一种常见的评估重采样点集质量的指标, 尤其是能反映出重采样点集的蓝噪声性质. 本文将使用 Wei 于 2011 年提出的微分域分析算法<sup>[25]</sup> (Differential Domain Analysis, 简称 DDA) 来计算点集的功率谱, 径向平均功率谱和各向异性.

#### 4.1.3 其它指标

本文算法的目标是能够根据目标密度函数  $\rho(x)$  自适应控制密度, 本质上就是比较  $C_i$  与  $C$  两个向量的相似度, 因此除了上述提及的衡量指标, 本文还计算比较了余弦相似度, Tanimoto 系数, 曼哈顿(Manhattan) 距离与  $\sigma$  系数等四个指标. 其中, Tanimoto 系数的计算公式为

$$\frac{A \cdot B}{\|A\|^2 + \|B\|^2 - A \cdot B},$$

$A$  与  $B$  均为  $n$  维向量;  $\sigma$  系数定义为所有重采样点到最近的重采样邻点的欧氏距离的标准差. 其值越小, 说明重采样点集的分布越均匀. 但需要注意的是,  $\sigma$  系数仅适用于均匀重采样情形的结果比较.

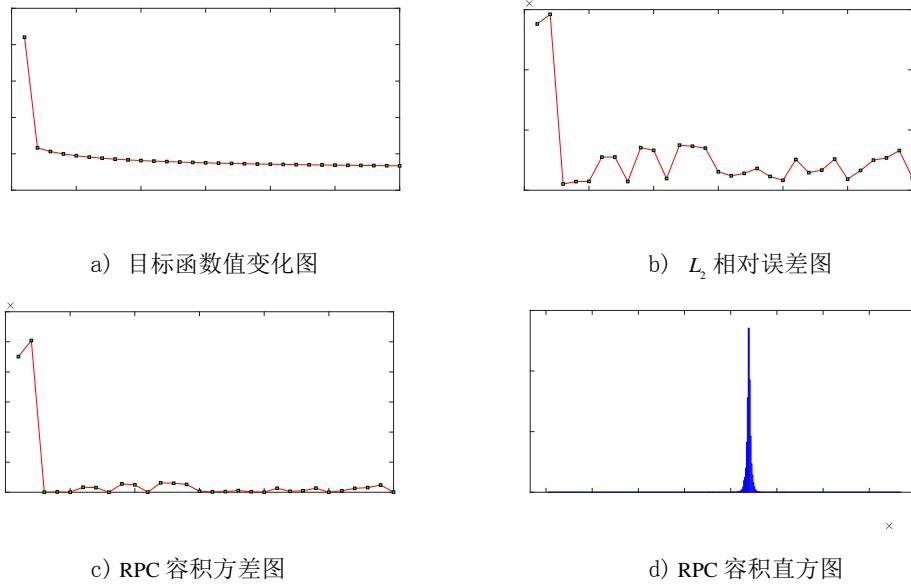


图 2 RPC 容积相关指标的曲线变化图

## 4.2 均匀重采样

当用户指定的目标密度函数  $\rho(x)$  恒为某个常数  $c$  时, 本文算法可以产生高质量的均匀分布的重采样点集。在接下来的实验当中本文默认将回溯线搜索的次数设置为 5 次。此外, 本文的算法理论是建立在最优传输理论之上的, 因此接下来为了方便说明, 将本文算法简称为 OT 算法。

### 4.2.1 RPC容积相关指标的曲线变化图

接下来本文将展示 RPC 容积相关指标的曲线变化图, 如图 2 所示。以牛点云(即隐藏曲面形状为牛的点云, 含 110,000 个点)为例作为输入, 重采样点数目为 5,000, 迭代次数为 30 次。

随着迭代次数的增加, 目标函数值呈现下降趋势, 如图 2a 所示。与此同时, RPC 容积的相对误差与方差最初会有小幅度的上升, 这是因为在初步重采样当中执行了 Lloyd 迭代, 而 Lloyd 算法并未对 RPC 容积作出约束; 紧接着进入优化算法流程, 两者起初的下降曲线呈现了较快的下降速度, 随后开始趋于平稳, 尽管中间会有波动, 但这是顶点位置优化过程导致的, 有助于跳出局部最小值, 不断寻找全局最小值, 如图 2b, 2c 所示。最后, 本文还给出了 RPC 容积的直方图, 可以直接展示最终的容积控制效果, 如图 2d 所示。从直方图中明显的一个高峰可以看出, 所有重采样点的 RPC 容积基本都集中于一个值上, 因此最终所有 RPC 的容积基本是趋于一致的。

### 4.2.2 运行时间

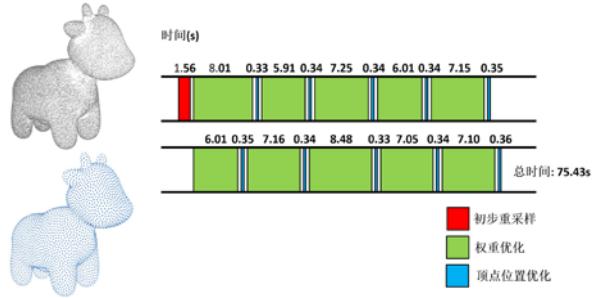


图 3 算法运行时间图

依旧以牛点云(含 110,000 个点) 为例作为输入, 重采样点数目为 5,000, 迭代次数为 10 次。所需要的总运行时间与各个算法步骤所耗费的时间如图 3 所示。可以看出, 算法的总运行时间在 1 分 15 秒左右, 这已经是在程序并行的前提下得到的运行时间, 但并不算少。实际上, 算法最大的时间瓶颈主要在于算法每一次使用阻尼牛顿法进行权重优化, 求解牛顿下降方向时需要求解一次稀疏线性系统, 求解牛顿步长时又需要求解若干次稀疏线性系统, 这无疑是比较耗时的。与基于高斯加权拉普拉斯图的算法<sup>[17]</sup>(以下简称图 Laplacian 算法), Lloyd<sup>[10]</sup>, WLOP<sup>[8]</sup>这三种点云重采样领域上的经典算法进行比较发现, 在同等实验环境(包括实验模型, 输入数目, 输出数目与迭代次数等) 下, 其它算法的运行时间均在 100 秒内, 这说明本文在算法运行效率上依旧有较大的提升空间。

表 1 针对各个点云的均匀重采样质量统计表

点云名称	算法	容积方差	$L_2$ 相对误差	余弦相似度	曼哈顿距离	$\sigma$ 系数
牛	OT	<b><math>2.42 \times 10^{-12}</math></b>	<b>0.00527114</b>	<b>0.9999861</b>	<b>0.04588295</b>	0.0496581
	Laplacian	$1.57 \times 10^{-8}$	0.0364175	0.9993375	0.4516166	<b>0.0342586</b>
	Lloyd	$9.04 \times 10^{-8}$	0.0850668	0.9964013	1.162502	0.0678963
	WLOP	$1.74 \times 10^{-6}$	0.383725	0.9336239	5.014445	0.200308
猫	OT	<b><math>1.95 \times 10^{-10}</math></b>	<b>0.00219604</b>	<b>0.9999976</b>	<b>15.92827</b>	0.0440213
	Laplacian	$7.31 \times 10^{-3}$	0.0424891	0.9990986	330.6048	<b>0.0356537</b>
	Lloyd	$2.54 \times 10^{-2}$	0.0782441	0.9969529	632.0729	0.0593956
	WLOP	$4.04 \times 10^{-2}$	0.0998851	0.9950485	800.7224	0.0570439
人体	OT	<b><math>2.38 \times 10^{-13}</math></b>	<b>0.00366317</b>	<b>0.9999933</b>	<b>0.07642399</b>	0.0487861
	Laplacian	<b><math>6.46 \times 10^{-8}</math></b>	0.4524367	0.9990314	0.9719213	<b>0.0400399</b>
	Lloyd	<b><math>2.73 \times 10^{-7}</math></b>	0.0883988	0.9961156	2.019054	0.0681321
	WLOP	<b><math>8.88 \times 10^{-7}</math></b>	0.163285	0.9869298	3.637002	0.09242

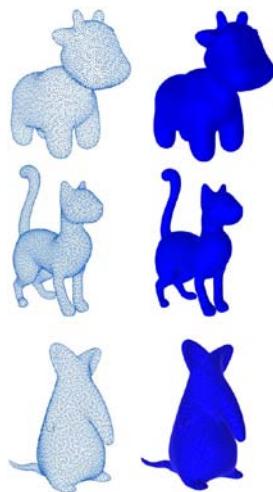


图 4 针对各个点云的功率谱分析图(均匀重采样), 第一列为算法输出的重采样点集, 第二列为最终的容积误差图(颜色愈趋向于蓝色说明容积误差愈低), 第三列为重采样点集的功率谱图, 第四列为重采样点集的径向平均功率谱图和各向异性图

#### 4.2.3 蓝噪声性质

本文使用 DDA 算法计算本文算法最终输出的重采样点集的功率谱, 径向平均功率谱和各向异性, 以此来展示本文算法结果的蓝噪声性质, 其结果如图 4 所示, 第二列中区域颜色愈趋向于蓝色表示该区域的容积相对误差愈小. 图中一共展示了 3

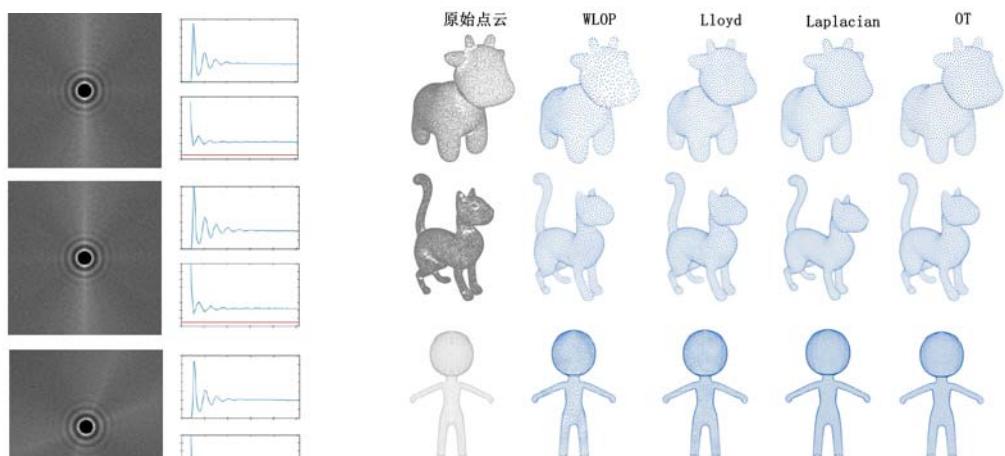


图 5 针对各个点云的均匀重采样结果图, 第一列为原始点云, 第二列为 WLOP 算法的重采样结果, 第三列为 Lloyd 算法的重采样结果, 第四列为图 Laplacian 算法的重采样结果, 第五列为本文算法的重采样结果

个点云模型的结果, 分别为牛、猫与老鼠点云. 所有点云的重采样点数目均为 10,000, 迭代次数为 10 次. 可以看出, 本文算法得到的重采样点集是具有较强的蓝噪声性质的.

#### 4.2.4 与其它算法的比较结果

本文将 3 个点云模型作为实验对象 (分别是图 5 中的牛、猫与人体点云), 与图 Laplacian 算法<sup>[17]</sup>,

表 2 针对各个点云的带密度重采样质量统计表

点云名称	算法	容积方差	$L_2$ 相对误差	余弦相似度	Tanimoto 系数	曼哈顿距离
人脸	OT	<b>3.96×10<sup>-10</sup></b>	<b>0.0966698</b>	<b>0.99536</b>	<b>0.007203377</b>	<b>0.06115673</b>
	Laplacian	2.68×10 <sup>-9</sup>	0.25157	0.9697833	0.007159624	0.06960397
	Lloyd	5.82×10 <sup>-10</sup>	0.116133	0.993324	0.007195006	0.08208054
球	OT	<b>8.76×10<sup>-11</sup></b>	<b>0.0186337</b>	<b>0.9998264</b>	<b>0.01138881</b>	<b>0.005808581</b>
	Laplacian	1.14×10 <sup>-9</sup>	0.0662723	0.9978112	0.01137903	0.04993776
	Lloyd	3.55×10 <sup>-9</sup>	0.115586	0.9933861	0.0113539	0.09095023

Lloyd<sup>[10]</sup>, WLOP<sup>[8]</sup>三种算法进行比较。实验点云的重采样点数目均为 5,000, 迭代次数为 10 次, 结果如图 5 所示。为了保证公平的结果对比, 本文的 Lloyd 算法、图 Laplacian 算法和 WLOP 算法均采用了作者提供的代码进行结果的输出, 并且在同一台机器上进行了所有测试。从图 5 可以明显看出, WLOP 算法难以产生均匀分布的重采样点集, 会受到原始点云较大的影响; 而其它方法均在视觉上可以产生均匀分布的重采样点集。

我们再用 4.1 节中介绍的衡量指标来量化各个算法的结果, 使得我们的结果比较更为客观严谨。各个算法针对上述 3 个点云计算的指标结果如表 1 所示。其中, 经加粗的数据表示在同一指标中表现最为优异。可以看出, 本文算法尽管在  $\sigma$  系数这个指标上较劣于图 Laplacian 算法, 但在其它指标(尤其是容积方差与  $L_2$  相对误差上) 的比较中, 本文算法都远远优于其它算法, 说明在进行均匀重采样的作业时, 本文算法是一个较优选择。

### 4.3 带密度的重采样

带密度的重采样指的是用户指定的目标密度函数  $\rho(x)$  并非常数函数的情形。在这种情形下, 本文算法使得重采样点集的分布符合用户预先指定分布, 如图 6 所示。在接下来的实验当中, 本文依旧将算法回溯线搜索的次数设置为 5 次。

#### 4.3.1 蓝噪声性质

以每个重采样点的平均曲率值为其目标密度值, 即  $\rho(x) = (\kappa_1(x) + \kappa_2(x)) / 2$ ,  $\kappa_1(x)$  与  $\kappa_2(x)$  均表示在点  $x$  处的主曲率, 本文算法通过 CGAL 进行主曲率的计算。所有点云的重采样点数目均为 10,000, 迭代次数为 10 次, 最终我们可以得到如图 7 所示的功率谱分析结果。与图 4 相比, 增加的一列(即第一列) 表示原始点云的平均曲率场, 区域颜色

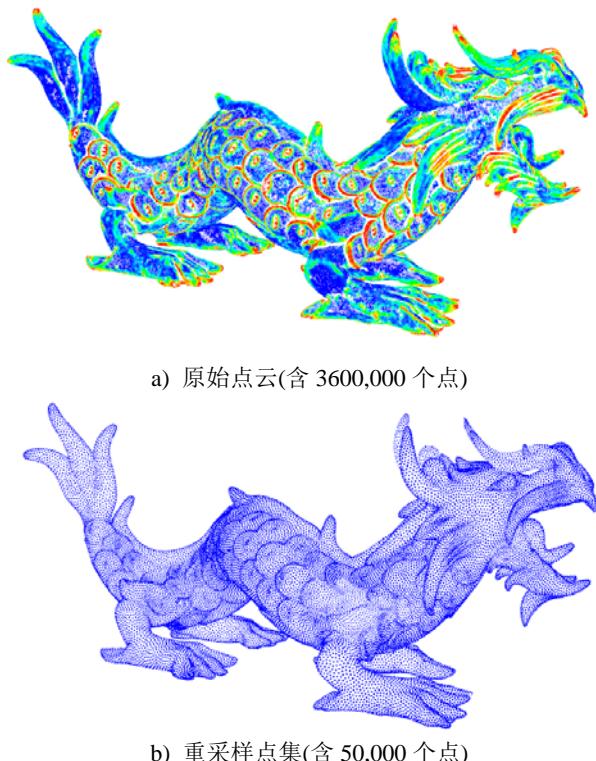


图 6 针对龙点云的带密度重采样结果, a) 表示原始点云, 其中颜色表示点的平均曲率, 点的颜色愈趋向于红色表示该区域平均曲率越大, b) 表示重采样点集。最终的 RPC 容积方差为 0.0108436

愈趋向于红色, 说明该区域的平均曲率值越大, 反之亦然。第二列为本文算法输出的重采样点集, 从图中也可以明显看出, 平均曲率值越大的区域, 重采样点的分布越密集, 较好地实现了自适应控制密度的目的, 结果图还表明, 本文算法输出的重采样点集依旧具备一定的蓝噪声性质。

#### 4.3.2 与其它算法的比较结果

接下来将目标函数设置为  $\rho(x, y, z) = ((x / 2 + 0.7)(y / 2 + 0.75) + 1.5)(z / 2 + 0.8) + 0.7$  这样一个自定义的密度函数, 其中  $(x, y, z)$  是 RPD 上任意一点

的三维坐标。与图 Laplacian 算法、Lloyd 算法两种算法 (WLOP 算法不适用于带密度的点云重采样) 进行了 5 个指标( $\sigma$  系数仅能用于衡量均匀重采样的结果) 的比较。实验中点云的重采样点数目均为 5,000, 迭代次数为 10 次, 结果如表 2 与图 8 所示。可以看出, 对于两个实验模型, 本文的算法结果基本都优于其它两种算法, 说明本文算法较好地实现了自适应控制密度的目标。

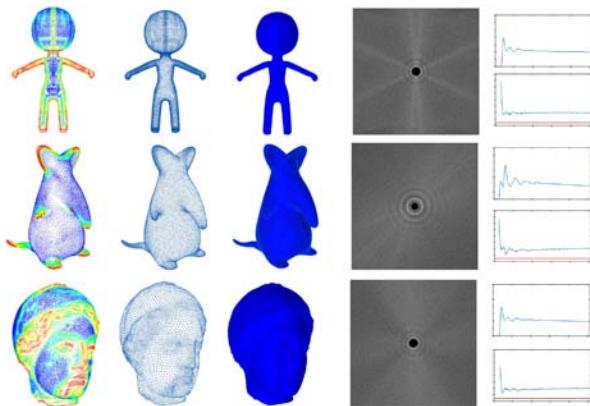


图 7 针对各个点云的功率谱分析图(带密度重采样), 第一列表示原始点云的平均曲率场, 第二列为算法输出的重采样点集, 第三列为最终的容积误差图, 第四列为重采样点集的功率谱图, 第五列为重采样点集的径向平均功率谱图和各向异性图

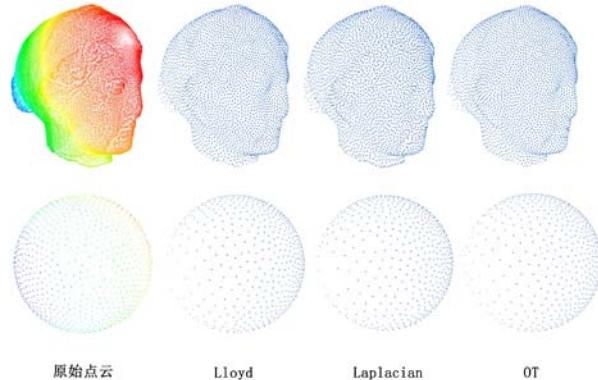


图 8 针对各个点云的带密度重采样结果图, 第一列为原始点云, 颜色表示点的目标密度, 点的颜色愈趋向于红色表示该区域的目标密度值越大, 第二列为 Lloyd 算法的重采样结果, 第三列为图 Laplacian 算法的重采样结果, 第四列为本文算法的重采样结果

#### 4.4 点云抗噪结果

由于本文在最小二乘法基础之上计算 RPD, 且每一次迭代都会根据新的重采样点集计算新的

RPD, 这相当于将重采样点不断地投影到其 RPC 上。因此, 本文算法在面对含有中等强度噪声的原始点云时具有良好的抗噪能力, 如表 3 与图 9 所示。其中, 原始点云含 699,000 个点, 内含大量噪声, 采用不同算法对该点云均匀重采样 5,000 个点发现, 图 Laplacian 算法与本文的算法均可以获得较令人满意的结果。在实际应用中可以根据噪声强度适当增加计算局部最佳估计曲面所用的邻点数, 从而提升重采样点集质量。

表 3 针对人脸点云的抗噪均匀重采样质量统计表

算法	容积方差	$\sigma$ 系数
OT	$3.37 \times 10^{-10}$	<b>0.0541701</b>
Laplacian	$6.60 \times 10^{-8}$	0.162701
Lloyd	$1.04 \times 10^{-8}$	0.0768007

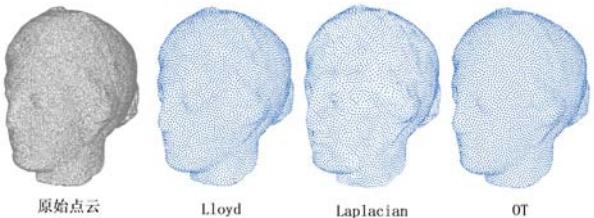


图 9 人脸点云抗噪结果, 第一列表示原始点云, 第二列表示 Lloyd 算法的抗噪结果, 第三列为图 Laplacian 算法的抗噪结果, 第四列为本文算法的抗噪结果

#### 4.5 收敛性分析

值得强调的是, 该目标函数是不具备单调性的, 因此无法直接采用单调收敛定理证明其收敛性。我们更多的关注点是放在经算法运行后重采样点集的位置上, 当固定重采样点集的权重时, 目标函数关于重采样点的位置的驻点是目标函数的极小值点; 每一次对重采样点集的位置进行优化后, 目标函数的值都会进行一定程度的下降。然而, 在每一次的权重优化以后, 目标函数值可能上升。于是随着迭代过程的进行, 目标函数值极有可能发生波动, 无法保证单调性。

但我们若将每一次迭代得到的目标函数值构成一个序列, 当目标密度函数在 RPD 上是有界时, 易证该序列是有界的, 则由维尔斯特拉斯定理可知该序列至少存在一个收敛的子列。从而本文算法具备部分收敛性。

由于优化过程中涉及大量非线性优化, 其收敛情况较依赖原始点云和大量参数。本文算法主要在

处理下述两类特殊点云时表现往往无法尽如人意，无法保证收敛到较优的结果，如图 10、11 所示。



a) 原始点云 b) 输出的重采样点集 c) 输出的 RPD

图 10 原始点云含 115,000 个点，输出的重采样点集大小为 10,000，迭代次数为 10 次

- (1) 当原始点云含有较为尖锐的特征边时(如与建筑物相关的点云)，本文算法在尖锐特征边附近得到的重采样点分布较为糟糕。这主要是因为本文采用二次曲面类型去进行局部最佳估计曲面的生成，而二次曲面通常较难拟合尖锐边缘。
- (2) 当原始点云中含有大量离群点或者原始点云表示的隐藏曲面是非封闭曲面时，这时需要调整局部最佳估计网格的半径，若将半径设置得较大，在顶点优化的过程当中容易产生点离开隐藏曲面的现象；而若将半径设置得较小，则由于点与其 RPC 重心位置基本重合，在算法的顶点位置优化过程当中便会一直滞留原处。尽管可以通过调整其它算法参数，如增加用于计算局部最佳估计网格的邻点数量来缓解该现象，但调参的过程依旧是较为繁琐的。

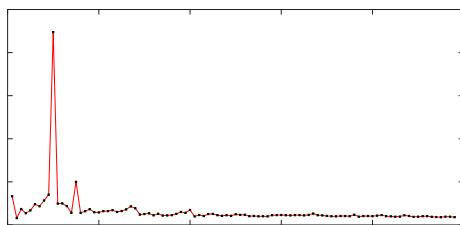


图 11 对图 9 中的模型执行 100 次算法，最终的 RPC 容积方差为 357.929，可以看出，尽管 RPC 容积方差呈收敛趋势，但依然无法收敛到一个较优的重采样结果。

## 5 结语

本文通过最优传输理论将重采样问题转化为最优化问题，在推导得到目标函数的梯度及 Hessian 矩阵之后，通过阻尼牛顿法与梯度下降法对目标函数进行交叉优化，形成了具有较强通用性的点云重采样框架。最后，本文基于各种指标，与其它点云重采样算法进行了全面客观的横向比较。结果表明，本文在自适应控制密度，蓝噪声性质等方面都不弱于其它经典算法。

除了 4.5 节中讨论的两类特殊点云之外，当用户指定的重采样点数量过少时本文算法表现不佳，在处理较大的重采样点集时运行时间过长等，也都是未来值得改进的问题。

## 参考文献

- [1] 3D scanning[Z], [https://en.wikipedia.org/wiki/3D\\_scanning](https://en.wikipedia.org/wiki/3D_scanning)
- [2] Chen J, Ge X, Wei L Y, et al. Bilateral blue noise sampling. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2013, 32(6): 111.
- [3] Schechter H, Bridson R. Ghost SPH for animating water. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2012, 31(4): 18.
- [4] Boissonnat J D. Geometric structures for three-dimensional shape representation. ACM Transactions on Graphics (TOG), 1984, 3(4): 266-286.
- [5] Amenta N, Bern M, Kamvysselis M. A new Voronoi-based surface reconstruction algorithm. Proceedings of the 25th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques, 1998: 415-421.
- [6] Bernardini F, Mittleman J, Rushmeier H, et al. The ballpivoting algorithm for surface reconstruction. IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics, 1999, 5(4): 349-359.
- [7] Lipman Y, Cohen-Or D, Levin D, et al. Parameterization-free projection for geometry reconstruction. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2007, 26(3): 22.
- [8] Huang H, Li D, Zhang H, et al. Consolidation of unorganized point clouds for surface reconstruction. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2009, 28(5): 17.
- [9] Cheng X, Zeng M, Lin J, et al. Efficient L0 resampling of point sets. Computer Aided Geometric Design, 2019, 75: 101790.
- [10] Chen Z, Zhang T, Cao J, et al. Point cloud resampling using centroidal Voronoi tessellation methods. Computer-Aided Design, 2018, 102: 12-21.
- [11] Lloyd S. Least squares quantization in PCM. IEEE Transactions on Information Theory, 1982, 28(2): 129-137.
- [12] Zhong S, Zhong Z, Hua J. Surface reconstruction by parallel and

- unified particle-based resampling from point clouds. Computer Aided Geometric Design, 2019, 71: 43-62.
- [13] De Goes F, Breeden K, Ostromoukhov V, et al. Blue noise through optimal transport. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2012, 31(6): 111.
- [14] Balzer M, Schröder T, Deussen O. Capacity-constrained point distributions: a variant of Lloyd's method. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2009, 28(3): 1-8.
- [15] Caffarelli L A, McCann R J. Free boundaries in optimal transport and Monge-Ampere obstacle problems. Annals of Mathematics, 2010: 673-730.
- [16] Qin H, Chen Y, He J, et al. Wasserstein blue noise sampling. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2017, 36(5): 1-13.
- [17] Luo C, Ge X, Wang Y. Uniformization and density adaptation for point cloud data via graph Laplacian. Computer Graphics Forum, 2018, 37(1): 325-337.
- [18] Zhang S, Guo J, Zhang H, et al. Capacity constrained blue-noise sampling on surfaces. Computers & Graphics, 2016, 55: 44-54.
- [19] Aurenhammer F, Hoffmann F, Aronov B. Minkowski-type theorems and least-squares partitioning. Proceedings of the Eighth Annual Symposium on Computational Geometry, 1992: 350-357.
- [20] Lévy B, Bonneel N. Variational Anisotropic Surface Meshing with Voronoi Parallel Linear Enumeration. Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [21] Lévy B. A numerical algorithm for L2 semi-discrete optimal transport in 3D. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 2015, 49(6): 1693-1715.
- [22] Nocedal J, Wright S. Numerical optimization. Springer Science & Business Media, 2006.
- [23] CGAL, <https://www.cgal.org/documentation.html>
- [24] Geogram, <http://alice.loria.fr/index.php/software/4-library/75-geogram.html>
- [25] Wei L Y, Wang R. Differential domain analysis for nonuniform sampling. ACM Transactions on Graphics (TOG), 2011, 30(4): 110.

## 附录. 目标函数的梯度及Hessian矩阵推导

重述相关符号说明:  $e_{ij}$  为连接  $x_i$  和  $x_j$  的边;  $e_{ij}^*$  为关于  $x_i$  和  $x_j$  的等分面;  $|e_{ij}|$  为  $e_{ij}$  在三角形  $\tau$  上的投影长度;  $T_{ij}$  为等分面  $e_{ij}^*$  相交的三角形的指标集;  $\bar{\rho}_{ij}$  为密度函数在  $e_{ij}^* \cap M$  上的平均值;  $\Omega_i$  为  $x_i$  所有 1-邻域点的指标集.

**定义.** 我们将垂直于相邻两点连线的一个超平面称之为一个等分面, 该超平面距离其中一个重采样点  $x_i$  的距离为

$$d_{ij} = \frac{|e_{ij}|^2 + w_i - w_j}{2|e_{ij}|}, \text{ 其中重采样点 } x_i \text{ 与 } x_j \text{ 的等分面距离 } x_i \text{ 的距离是由 } x_i \text{ 与 } x_j \text{ 的权重 } w_i \text{ 与 } w_j \text{ 共同决定的.}$$

当出现两个重采样点对应的局部最佳估计网格被  $x_i$  与  $x_j$  之间的等分面切割的情形时(如图 12a 所示), 此时两者的 RPC 均关于权重  $w_i$  与  $w_j$  连续变化, 可以将 Reynolds 传输定理运用到梯度及 Hessian 矩阵的推导当中; 而当两个局部最佳估计网格未被其对应的等分面切割时, 说明无法直接使用 Reynolds 传输定理, 此时对应的 Hessian 矩阵元素为 0, 无需计算.

在接下来的部分中, 我们首先来推导目标函数的梯度  $\nabla_{w_i}, \nabla_{x_i}$ . 我们假设当我们对某个权重  $w_i$  或者某个重采样点位置  $x_i$  施加一个充分小的扰动时, 只有邻居点的 RPC  $\{P_j \mid j \in \Omega_i\}$  会发生改变. 需要注意的是, 因为相邻的局部最佳估计网格之间的间隙的存在, 此处  $T_{ij}$  一般不等于  $T_{ji}$ , 如图 13 a 所示. 再令  $m_i = \int_{P_i} \rho(x) d\sigma$ . 而在固定区域上剖分出来的各个 RPC 的容积之和总是一个常数, 即  $\sum_i m_i = m_\gamma$ . 分别对于  $w_i, x_i$  求导得到  $\nabla_{w_i} m_i + \sum_{j \in \Omega_i} \nabla_{w_i} m_j = 0$ ,  $\nabla_{x_i} m_i + \sum_{j \in \Omega_i} \nabla_{x_i} m_j = 0$ .

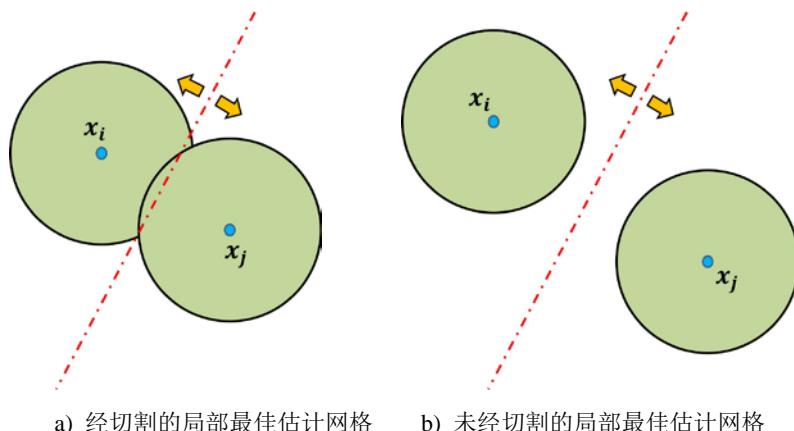


图 12 局部最佳估计网格示意图

**引理 1** 重采样点  $x_j$  对应的 RPC 的容积  $m_j$  对于重采样点  $x_i$  的权重  $w_i$  的梯度为

$$\nabla_{w_i} m_j = -\frac{\overline{\rho}_{ij}}{2} \sum_{l \in T_{ij}} \frac{|e_{ij}^* \cap \tau_l|}{|e_{ij}|_{\tau_l}} + \sum_{\substack{k \in \Omega_i \\ k \neq j}} (-\frac{\overline{\rho}_{ik}}{2} \sum_{l \in T_{ik}} \frac{|e_{ik}^* \cap \tau_l|}{|e_{ik}|_{\tau_l}} + -\frac{\overline{\rho}_{ki}}{2} \sum_{l \in T_{ki}} \frac{|e_{ki}^* \cap \tau_l|}{|e_{ki}|_{\tau_l}}) \quad (10)$$

**证明** 由 Reynolds 传输定理, 注意到  $\rho(x)$  是与  $(x_i, w_i)$  相互独立的, 我们有

$$\begin{aligned} \nabla_{w_i} m_j &= \sum_{k \in \Omega_j} \sum_{l \in T_{jk}} \int_{e_{jk}^* \cap \tau_l} \rho(x) v_{w_i} \cdot b ds \\ &= - \sum_{l \in T_{ij}} \int_{e_{ij}^* \cap \tau_l} \rho(x) v_{w_i} \cdot b ds - \sum_{\substack{k \in \Omega_i \\ k \neq j}} \left( \sum_{l \in T_{ik}} \int_{e_{ik}^* \cap \tau_l} \rho(x) v_{w_i} \cdot b ds + \sum_{l \in T_{ki}} \int_{e_{ki}^* \cap \tau_l} \rho(x) v_{w_i} \cdot b ds \right), \end{aligned} \quad (11)$$

其中,  $v_{w_i} = \nabla_{w_i} x$  中的  $x$  指的是等分面  $e_{ij}^*$  和三角形  $\tau_l$  (其法线为  $n_{\tau_l}$ , 网格上的点为  $p_{\tau_l}$ ) 的交集上的点,  $b$  是边界点处指向外侧的法线. 接下来我们需要计算  $v_{w_i}$ , 由于间隙的存在, 我们需要分成两部分去计算(上标代表属于哪一侧, 如  $x^{(i)}$  表示落在属于重采样点  $x_i$  的 RPC 上的边界点). 其中各变量含义可参考图 13 b.

$$\begin{aligned} (x_j - x_i) \cdot (x^{(i)} - c_{ij}) &= 0, \quad (x^{(i)} - p_{\tau_l}^{(i)}) \cdot n_{\tau_l}^{(i)} = 0, \\ (x_j - x_i) \cdot (x^{(j)} - c_{ij}) &= 0, \quad (x^{(j)} - p_{\tau_l}^{(j)}) \cdot n_{\tau_l}^{(j)} = 0. \end{aligned}$$

此外,  $c_{ij} = x_i + \frac{d_{ij}}{|e_{ij}|}(x_j - x_i)$ ,  $d_{ij} = \frac{|e_{ij}|^2 + w_i - w_j}{2|e_{ij}|}$ . 注意到边界点处指向外侧的单位法向量为

$$b^{(i)} = \frac{(x_j - x_i) - ((x_j - x_i) \cdot n_{\tau_l}^{(i)}) n_{\tau_l}^{(i)}}{\|(x_j - x_i) - ((x_j - x_i) \cdot n_{\tau_l}^{(i)}) n_{\tau_l}^{(i)}\|}, \quad b^{(j)} = \frac{(x_j - x_i) - ((x_j - x_i) \cdot n_{\tau_l}^{(j)}) n_{\tau_l}^{(j)}}{\|(x_j - x_i) - ((x_j - x_i) \cdot n_{\tau_l}^{(j)}) n_{\tau_l}^{(j)}\|}.$$

从而

$$\begin{aligned} \nabla_{w_i} x^{(i)} \cdot b^{(i)} &= \frac{1}{2 \|(x_j - x_i) - ((x_j - x_i) \cdot n_{\tau_l}^{(i)}) n_{\tau_l}^{(i)}\|} = \frac{1}{2 |e_{ij}|_{\tau_l}}, \forall l \in T_{ij}, \\ \nabla_{w_i} x^{(j)} \cdot b^{(j)} &= \frac{1}{2 \|(x_j - x_i) - ((x_j - x_i) \cdot n_{\tau_l}^{(j)}) n_{\tau_l}^{(j)}\|} = \frac{1}{2 |e_{ji}|_{\tau_l}}, \forall l \in T_{ji}. \end{aligned} \quad (12)$$

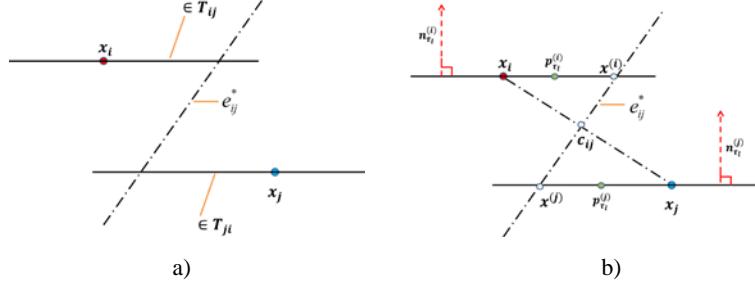


图 13 a 中由于间隙的存在,  $T_{ij}$  一般不等于  $T_{ji}$ , b 为推导过程中用到的各变量的几何示意图

将式(12)代入式(11)式则命题得证. 仿照引理 1 的证明思路, 我们可得引理 2.

**引理 2** 设重采样点  $x_j$  对应的 RPC 的容积  $m_j$  对于重采样点  $x_i$  的位置的梯度为

$$\begin{aligned} \nabla_{x_i} m_j &= \sum_{l \in T_{ij}} \frac{-\int_{e_{ij}^* \cap \tau_l} \rho(x) x ds}{|e_{ij}^*|_{\tau_l}} - \sum_{l \in T_{ij}} \frac{|e_{ij}^* \cap \tau_l|}{|e_{ij}^*|_{\tau_l}} \bar{\rho}_{ij} m_{ij} + \\ &\quad \sum_{\substack{k \in \Omega_i \\ k \neq j}} \left( \sum_{l \in T_{ik}} \frac{-\int_{e_{ik}^* \cap \tau_l} \rho(x) x ds}{|e_{ik}^*|_{\tau_l}} - \sum_{l \in T_{ik}} \frac{|e_{ik}^* \cap \tau_l|}{|e_{ik}^*|_{\tau_l}} \bar{\rho}_{ik} m_{ik} + \sum_{l \in T_{ki}} \frac{-\int_{e_{ki}^* \cap \tau_l} \rho(x) x ds}{|e_{ki}^*|_{\tau_l}} - \sum_{l \in T_{ki}} \frac{|e_{ki}^* \cap \tau_l|}{|e_{ki}^*|_{\tau_l}} \bar{\rho}_{ki} m_{ki} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $m_{ij} = -x_i + \left(1 - \frac{2d_{ij}}{|e_{ij}|}\right)(x_j - x_i)$ .

稍微回顾一下我们之前提及的能量函数的  $E(X, W) = \sum_i \int_{P_i} \rho(x) \|x - x_i\|^2 dx$ . 我们可以利用上面得到的引理, 推导出能量

函数关于重采样点位置  $x_i$  与权重  $w_i$  的梯度，从而可得定理 1。类似地可证得定理 2。

**定理 1** 设  $b_i = \int_{P_i} x \rho(x) dx / m_i$ ，则能量函数  $E(X, W)$  关于重采样点的位置  $x_i$  的梯度为

$$\nabla_{x_i} E = 2m_i(x_i - b_i) + \sum_{j \in \Omega_i} (w_j - w_i) \nabla_{x_i} m_j, \quad (14)$$

**定理 2** 能量函数  $E(X, W)$  关于重采样点的权重  $w_i$  的梯度为

$$\nabla_{w_i} E = \sum_{j \in \Omega_i} (w_j - w_i) \nabla_{w_i} m_j. \quad (15)$$

接下来便可分别由定理 1 与 2 求得能量函数  $F(X, W)$  的梯度：

**定理 3** 目标函数  $F(X, W)$  分别关于重采样点的权重  $w_i$  的与位置  $x_i$  的梯度为

$$\begin{aligned} \nabla_{w_i} F(X, W) &= m_i - m, \\ \nabla_{x_i} F(X, W) &= 2m_i(b_i - x_i). \end{aligned} \quad (16)$$

由引理 1，定理 3 及等式  $\nabla_{w_i} m_i + \sum_{j \in \Omega_i} \nabla_{w_i} m_j = 0$ ，我们可以直接得到

**定理 4** 目标函数  $F(X, W)$  关于重采样点的权重  $w_i$  的 Hessian 矩阵为

$$\begin{aligned} [H_F]_{ij} &= -\frac{\overline{\rho_{ji}}}{2} \sum_{l \in T_{ji}} \frac{|e_{ji}^* \cap \tau_l|}{|e_{ji}|_{\tau_l}} + \sum_{\substack{k \in \Omega_j \\ k \neq i}} \left( -\frac{\overline{\rho_{jk}}}{2} \sum_{l \in T_{jk}} \frac{|e_{jk}^* \cap \tau_l|}{|e_{jk}|_{\tau_l}} + -\frac{\overline{\rho_{kj}}}{2} \sum_{l \in T_{kj}} \frac{|e_{kj}^* \cap \tau_l|}{|e_{kj}|_{\tau_l}} \right), \\ [H_F]_{ii} &= -\sum_{j \in \Omega_i} [H_F]_{ij}. \end{aligned} \quad (17)$$



**CAI Qinyi**, born in 1995, M.S.. His main research interests include computer graphics.

**CHEN Zhonggui**, born in 1982, Ph.D., professor. His main research interests

include computer graphics and image processing.

**CAO Juan**, born in 1983, Ph.D., associate professor. Her main research interests include CAGD&CG.

## Background

Point clouds obtained through 3D scanners have some defects: the point clouds may contain noise and the points are unevenly distributed in different directions. To the best of our knowledge, it is not well studied till now about high-quality point cloud resampling with the exact capacity constraint for each resampling point.

In this paper, we carry out research to deal with the above problems. The main contribution is to propose a new algorithm for performing high-quality resampling tasks on point clouds, that is, using a sparse set of resampling points to express the geometric shape of the dense original point cloud. The distribution of the resampling points conforms to a target

distribution specified by the user, and has certain blue noise properties. In this way, high-quality point clouds can be applied to various downstream applications, such as point cloud-based rendering, medical images, animation and three-dimensional reconstruction.

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (Nos. 61872308, 61972327), the Natural Science Foundation of Fujian Province (No. 2019J01026), the Open Project Program of State Key Laboratory of Virtual Reality Technology and Systems, Beihang University (No. VRLAB2021B01), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities (Nos. 20720190011, 20720190063).