

多目标进化算法性能评价指标研究综述

王丽萍¹⁾任宇¹⁾邱启仓²⁾邱飞岳³⁾

¹⁾(浙江工业大学 计算机科学与技术学院, 杭州 310023)

²⁾(之江实验室, 杭州 310023)

³⁾(浙江工业大学, 杭州 310023)

摘要 多目标进化算法根据性能评价指标衡量其优劣, 主要从算法所求解集的质量、算法求解效率以及算法鲁棒性三方面来评价, 并侧重于解集的质量, 现有的相关工作缺乏对评价指标数学性质的分析。本文将评价指标按性能标准分为四类: 计数指标、收敛性指标、多样性指标、综合性指标, 其中计数指标统计符合指标要求的解个数或比例, 收敛性指标衡量解集到参考集的贴近程度, 多样性指标衡量解集分布的均匀程度与求解极端值的能力, 并按性质类型分为分布性指标、延展性指标和同时衡量前两者的指标, 综合性指标同时衡量收敛性和多样性, 并按适用范围分为通用指标和专用指标。本文对比分析了 77 种指标的参考集、比较函数以及时间复杂度, 并从高维目标适应性、离群点敏感性、参考集合理性、指标值最优性四个方面对部分指标进行了分析, 为研究者们选择合适的指标提供方法, 以应对不同环境下的复杂问题。最后展望了多目标进化算法性能评价有待进一步研究的方向。

关键词 多目标优化; 进化算法; 评价指标; 收敛性; 多样性

中图分类号: TP391.9

Survey on Performance Indicators for Multi-Objective Evolutionary Algorithms

Wang Li-Ping¹⁾ Ren Yu¹⁾ Qiu Qi-Cang²⁾ Qiu Fei-Yue³⁾

¹⁾(College of Computer Science and Technology, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023)

²⁾(Zhejiang Lab, Hangzhou 310023)

³⁾(Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310023)

Abstract The performance of multi-objective algorithms is evaluated by indicators, which mainly takes three aspects into consideration and focus on the first aspect: the quality of the solution set obtained by the algorithms, the efficiency of the algorithms, and the robustness of the algorithms. Existing related work lacks of mathematical analysis for indicators. In this paper, we categorize the indicators into four groups based on performance criteria: counting indicators, convergence indicators, diversity indicators, and comprehensive indicators. The counting indicators tally the amount or the ratio of non-dominated solutions or elite solutions that satisfy the criterion of the metrics, there are two main differences of counting indicators and non-counting indicators, one is whether the range of indicators is discrete, the other is whether the values of all objectives are only used for comparison but not directly participate in the calculation. The convergence indicators evaluate the convergence of the solution set mainly by calculating the distance of the solution set to approximation of Pareto Front or the reference set, univariate convergence indicators evaluate the closeness between the solution set and Pareto Front, and binary convergence metrics evaluate the closeness between two different solution sets. According to property, the diversity indicators are further divided into distribution indicators, spread indicators, and indicators measuring both distribution and

收稿日期: 年-月-日; 最终修改稿收到日期: 年-月-日 *投稿时不填写此项*。本课题得到浙江省自然科学基金项目(LQ20F020014)、浙江省重点研发计划项目(2018C01080)、国家自然科学基金项目(61472366, 61379077)资助。王丽萍(通信作者), 博士, 教授, 中国计算机学会(CCF)会员, 主要研究方向为计算智能、决策优化, E-mail: wlp@zjut.edu.cn, Tel: 13958052258。任宇, 硕士研究生, 主要研究方向为计算智能、决策优化。邱启仓, 硕士, 主要研究方向为智能控制。邱飞岳(通信作者), 博士, 教授, 主要研究方向为智能控制、深度学习, E-mail: qfy@zjut.edu.cn。

spread, the distribution of the solution set considers the uniformity in the objective space, and the spread of the solution set measures the capability to obtain extreme solutions. The comprehensive indicators evaluate the convergence and the diversity of the solution set at the same time, which are further divided into general indicators and special indicators by scope of application, what's more, special indicators include that used for user-based evolutionary algorithms, dynamic evolution algorithms and multi-modal evolutionary algorithms. We also illustrate the reference set, the comparison function, and the time complexity of 77 indicators. Specifically, the reference set is used to assist in the calculation of the performance indicators value, the comparison function can tell researchers whether the value of indicators bigger is better or smaller, and the time complexity reflects the difficulty to calculate the indicators. Then we analyze some indicators from four aspects: 1) many-objective adaptability, whether the indicators are applicative in high-dimensional objective space, 2) outlier sensitivity, assessing whether the values of the indicators are affected badly by outliers, 3) reference set rationality, discussing the reasonable range of values for the reference set, 4) value optimality, some mathematical work for the optimal value the indicators can reach. Through these analyses, we offer approaches for researchers to choose right indicators to deal with complex problems under different circumstances. Finally, we end up with discussing some directions about performance indicators that show potential from nine different aspects: comprehensive indicators without any prior information, a new type of multivariate indicators for evaluating the performance of multitask optimization, indicators used for many-objective evolutionary algorithms, performance measurement in large-scale optimization, the evaluation of the robustness of algorithms, novel indicators used for user-based, dynamic and multi-modal evolutionary algorithms to overcome the deficiency of the existing indicators, and last but not least, research on the mathematical properties of performance indicators.

Key words multi-objective optimization; evolutionary algorithms; performance indicators; convergence; diversity

1 引言

多目标优化问题 (Multiobjective Optimization Problems, MOPs)是指同时优化多个目标的问题,这些目标相互矛盾,一个目标性能的提升意味着另一个或多个目标性能的下降。近几十年来,研究者们提出了许多求解 MOPs 的方法,其中主要方法是多目标进化算法^[1-3](Multiobjective Evolutionary Algorithms, MOEAs),这是一类基于种群的启发式搜索方法,模拟了生物的选择与进化过程,采用随机搜索的策略,无需知道 MOPs 的先验性知识即可进行求解,代表性的 MOEAs 有 1) 基于支配关系的 NSGA-II^[4](Nondominated Sorting Genetic Algorithm-II、SPEA2^[5](Strength Pareto Evolutionary Algorithm 2)以及 PESA-II^[6](Pareto Envelop-based Selection Algorithm-II); 2) 基于分解的 MOEA/D^[7](Multiobjective Evolutionary Based on Decomposition)、MOEA/D-M2M^[8](Decomposition of

a Multiobjective Number of Simple Multiobjective Subproblems)以及 RVEA^[9](Reference Vector Guided Evolutionary Algorithms); 3) 基于性能评价指标的 IBEA^[10](Indicator-based Evolutionary Algorithm)、SMS-EMOA^[11](S Metric Selection Based Evolutionary Multiobjective Algorithm)以及 HypE^[12](Hypervolume Based Evolutionary Algorithm)。这些算法在众多实际领域中均有应用,如物流工程^[13]、能源与动力工程^[14]、自动化控制^[15]等。

为了更好地选择算法求解不同类型的 MOPs,如何衡量这些不同 MOEAs 的性能成为了一大热门课题,但是求解 MOPs 不同于求解单目标优化问题 (Single-objective Optimization Problem, SOP),后者只需寻找出所求得解集中的最小值或是最大值即可比较算法性能优劣,而前者由于多个目标之间的矛盾性,所得最优解并非单个解,而是由一组非支配解构成的集合,以最小化 MOPs 为例,如算法求得一组解 $S_1 = \{(0.1, 0.9), (0.4, 0.6), (0.9, 0.1)\}$,另一算法求得 $S_2 = \{(0.2, 0.8), (0.6, 0.4), (0.8, 0.2)\}$,

此时无法通过直接比较两组解集来判断算法性能优劣, 所以设计一种适用于 MOPs 的性能评价指标变得十分重要。

比较不同 MOEAs 的性能优劣可以考虑以下三个方面^[16], 算法所求解集的质量、算法的求解效率以及算法的鲁棒性。

(1) MOEAs 所求解集的质量, 主要衡量解集的非支配解数量、收敛性(Convergence)和多样性(Diversity)。收敛性衡量的是算法所求得的 Pareto 近似最优解集 S 到真实 Pareto 前沿^[17]的贴近程度; 多样性衡量的是解集 S 的分布性与延展性^[18](Distribution and Spread)。

(2) MOEAs 的求解效率, 包括分析算法的时间复杂度, 统计算法运行的实际时间开销, 以及评估评价指标的数值与迭代次数的关系。当多种不同算法所求解集质量相近时, 比较算法的求解效率会更有意义。此外, 算法的求解效率在动态相关的实际问题^[19-21]中较为关注。

(3) MOEAs 的鲁棒性, 算法的强鲁棒性是指对更多具有不同特征的问题具有良好的求解能力, 对于算法参数以及随机的初始种群具有较低的敏感性, 并且算法所求得解集比较稳定。针对某一 MOEAs 进行多次独立的实验, 其鲁棒性可以从评价指标的方差得到体现。

MOEAs 的评价指标主要通过衡量解集的质量来比较其性能优劣。不少学者针对 MOEAs 所求得解集质量的某一或某些性能进行了相关研究, 提出了一系列的评价指标。

Van Veldhuizen 等人^[22]提出了一系列用于统计非支配解的数量或是比例的计数指标, 这些指标并未考虑真实 Pareto 前沿的信息, 故 Van Veldhuizen 等人^[23]提出了错误率 ER, 与 Pareto 近似前沿 P (Approximation of Pareto Front)的信息进行了交互。Zitzler 等人^[24]提出了覆盖率(Coverage, C), 用于比较两个解集之间的相互关系而非衡量解集与真实 Pareto 前沿的关系, 适用于真实 Pareto 前沿信息未知的情况下算法性能的比较。

Van Veldhuizen 等人^[25]提出了经典的收敛性指标世代距离(Generational Distance, GD), GD 计算的是解到相距最近参考点的平均距离, 其中参考集由真实 Pareto 前沿均匀采样而得。类似地有收敛性指标 γ ^[26](the Convergence Metric)和 M_1^* ^[27], 它们与 GD 的区别在于计算的距离类型不同。Schott 提出了收敛性指标七点平均距离^[28](Seven Points Average

Distance, SPAD), Schott 认为在实际问题中难以获取真实 Pareto 前沿的准确信息, 故用参考集 R 取代了 Pareto 近似前沿 P 来对解集的收敛性进行评价。

Deb 等人^[26]提出了多样性指标 Δ' , 计算的是连续解之间的距离与其平均值之差, Schott^[28]提出了类似的多样性指标空间指标(Spacing, SP), 计算的是相距最近的两个解与其平均值之差的平方, 但 Δ' 与 SP 均只针对解集的分布性而未考虑延展性, 故 Deb 等人^[4]提出了多样性指标 Δ , Δ 在 Δ' 的基础上将 Pareto 前沿边界点对算法性能的影响纳入考虑, 因此能够同时衡量解集的分布性与延展性, 但 Δ 只在 2 维的 MOPs 中适用, 为了应对更高维度的目标空间, Zhou 等人^[29]提出了多样性指标 Δ^* , 计算的是在某一目标上相距最近的解与边界点的距离。

Coello Coello 等人^[30]提出了综合性指标反世代距离(Invert Generational Distance, IGD), IGD 计算的是参考点到相距最近的解的平均距离, 距离所有解都较远的参考点具有较大的 IGD 值, 因此在反映解集收敛性的同时也能反映解集的多样性。Schutze 等人^[31]则结合了 GD 与 IGD 提出了综合性指标 Δ_p , 修改 GD 与 IGD 为 GD_p 与 IGD_p 以减弱解集 S 中解的数量对指标值的影响, Δ_p 计算的是 GD_p 与 IGD_p 之间的豪斯多夫距离^[32](Hausdorff Distance)。Zitzler 等人^[33]提出了著名的综合性指标超体积指标(Hypervolume, HV), 计算的是由所有非支配解与最低点(Nadir Point)构成的超立方体的超体积之和。

上述综合性指标能够很好地反映 MOEAs 求解静态非多模态的全局 MOPs 时所得解集的质量, 但是对于偏好多目标优化问题^[34](Preference-Based MOPs, PMOPs), 动态多目标优化问题^[35](Dynamic MOPs, DMOPs)以及多模态多目标优化问题^[36](Multimodal MOPs, MMOPs), 这些综合性指标均不再适用。这是因为在 PMOPs 中只需求解决策者感兴趣的局部解, 解集的质量与全局解的多样性存在矛盾^[37]; DMOPs 不再是静态的多目标优化问题, 上述综合性指标均难以应对 Pareto 前沿的动态变化^[38]; 求解 MMOEAs 时不仅需要目标空间中求得优质解集, 更要在决策空间中求得最佳分布^[39]。

针对 PMOPs, Wickramasinghe 等人^[40]提出了综合性指标 HV-UM(HV for User-preference EMO Algorithms), 通过人为划定偏好区域(Region of Interest, ROI)以计算区域内的 HV 值。Mohammadi 等人^[41]针对 HV-UM 受参考点影响较大的问题提出了基于复合 Pareto 前沿(Composite Front, CF)的综

合性指标 IGD-CF, 通过合成 Pareto 前沿来代替真实 Pareto 前沿以评估落在局部 Pareto 前沿上的解集质量。喻^[42]则提出了无需人为划定偏好区域的综合性指标 PMDA。

针对 DMOEAs, Zhou 等人^[43]提出了综合性指标平均反世代距离 (Mean IGD, MIGD), 将基于代数的时间变量 t 纳入了评价指标的计算。类似地有综合性指标平均超体积^[44](Mean HV, MHV)。Zou 等人^[45]则提出了综合性指标平均超体积差异 (Mean HVD, MHVD)。

针对 MMOEAs, Zhou 等人^[46]提出了新的反世代距离 IGDX, 计算的是决策空间中的 IGD 值。Yue 等人^[47]提出了综合性指标 Pareto 集合逼近 (Pareto Set Proximity, PSP), 计算的是决策空间中的覆盖率比率 (Cover Rate, CR) 与 IGDX 的比值, CR^[47]由多样性指标最大延展度^[48](Maximum Spread, MS) 改进而得。

随着评价指标的不断提出, 一些关于评价指标的综述也相继发表。如 Knowles 等人^[49]根据解集的优胜关系对评价指标进行分析与比较。Zitzler 等人^[50]分析了不用类型评价指标的限制, 并使用数学框架对评价指标进行了分类。Yen 等人^[51]通过双重淘汰锦标赛选择组合评价指标, 以集成的方式评价 MOEAs。Okabe 等人^[52]将评价指标分类为计数、距离、体积、分布性和延展性指标。Laszczyk 等人^[53]在 Okabe 等人^[52]的分类基础上又新增了支配、目标值、密度、统计、分区这 5 个类别, 并试图统一评价指标的命名方式。Jiang 等人^[18]将评价指标分为了计数、收敛性、多样性和综合性指标, 并研究了部分具有代表性的评价指标在不同凹凸性的 Pareto 前沿上的一致性与矛盾性。Li 等人^[54]和本文延用了 Jiang 等人^[18]的分类标准, 综述[54]中将多样性中的分布性命名为均匀性, 本文则增加了针对特定问题的综合性指标。综述[50][55]分别在文中提出了新的评价指标。上述这些综述在某些方面缺乏对指标的数学性质探讨。

本文的贡献主要如下: 1) 对具有代表性的 MOEAs 评价指标进行了整理与归纳, 给出了它们的参考集、比较函数与时间复杂度; 2) 从高维目标适应性、离群点敏感性、参考集合理性、指标值最优性四个方面对部分指标进行了分析与比较; 3) 提出了一些关于评价指标的性质与定理, 并对文中涉及的所有定理悉数进行了数学证明。

本文第 1 节引言部分简要介绍了 MOEAs 评价

指标的研究现状; 第 2 节背景详细介绍了多目标优化的相关概念; 第 3 节着重介绍了各个指标的相关概念与计算方式, 根据计数、收敛性、多样性、综合性这四种类型划分评价指标, 并探讨了它们的优势与不足; 第 4 节选取一些具有代表性的指标, 分析了目标维度、离群点、参考集、指标值四个方面对这些评价指标的影响, 给出并证明了一些关于评价指标的定理; 第 5 节结语, 提出了 MOEAs 评价指标有待进一步研究的方向。

2 多目标优化相关概念

不失一般性地以最小化 MOPs 为例, 定义 MOPs 的相关概念如下:

定义 1(多目标优化问题). 对于一个具有 n 维决策变量, m ($m \geq 2$) 维目标的 MOPs, 其数学模型^[16]的定义为:

$$\begin{cases} \min F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))^T \\ G_i(x) \geq 0, i \in \{1, 2, \dots, p\} \\ H_j(x) = 0, i \in \{1, 2, \dots, q\} \end{cases} \quad (1)$$

其中, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, x 为决策变量, Ω 为决策空间, $\Omega = \prod_{i=1}^n [L_i, U_i]$, L_i 和 U_i 分别为 x_i 的上下边界。 \mathbb{R}^m 为 m 维的目标空间, $F(x)$ 为目标向量, 代表 $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ 的映射关系, $G_i(x)$ 和 $H_j(x)$ 分别为问题的约束条件。

定义 2(Pareto 支配). 设 $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ 和 $x^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2)$ 是目标空间中满足约束条件的两个决策向量, x^1 Pareto 弱支配 x^2 , 记作 $x^1 \succcurlyeq x^2$, 满足:

$$(\forall i) f_i(x^1) \leq f_i(x^2), i \in \{1, \dots, m\} \quad (2)$$

x^1 Pareto 支配 x^2 , 记作 $x^1 \succ x^2$, 满足:

$$(\forall i) f_i(x^1) \leq f_i(x^2) \wedge (\exists j) f_j(x^1) < f_j(x^2) \quad (3)$$

其中 $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, m\}$ 。

x^1 Pareto 强支配 x^2 , 记作 $x^1 \succ\!\succ x^2$, 满足:

$$(\forall i) f_i(x^1) < f_i(x^2), i \in \{1, \dots, m\} \quad (4)$$

定义 3(Pareto 最优解). 若在可行域 Ω 中的解 x^* 满足约束条件且不被任何其他解支配, 则称 x^* 为 Pareto 最优解:

$$x^* \in \Omega \wedge \nexists x \in \Omega: x \succ x^* \quad (5)$$

定义 4(Pareto 最优解集). 所有 Pareto 最优解构成的集合称为 Pareto 最优解集 (Pareto Optimal Solution Set, PS)。

$$PS = \{x^* | x^* \in \Omega \wedge \nexists x \in \Omega: x \succ x^*\} \quad (6)$$

定义 5(Pareto 近似最优解集). 由 MOEAs 在某

次求解过程中所求得的最优解集称为 Pareto 近似最优解集(Approximation of Pareto Optimal Solution Set, S), 简称解集。

$$S = \{x^i\}, i \in \{1, \dots, N\} \quad (7)$$

其中 N 为人为设定的参数。

定义 6(非支配解). 若解集 S 中的解 x , 不被解集 S 中的其他解 Pareto 支配, 则称 x 为解集 S 中的非支配解。

$$x \in S \wedge \nexists y \in S: y > x \quad (8)$$

定义 7(Pareto 近似最优非支配解集). Pareto 近似最优解集 S 中所有非支配解所构成的集合称为 Pareto 近似最优非支配解集(Approximation of Pareto Optimal Nondominated Solution Set, NS), 简称非支配解集, 记为 NS 。

$$NS = \{x|x \in S \wedge \nexists y \in S: y > x\} \quad (9)$$

定义 8(Pareto 前沿). Pareto 最优解集 PS 中的所有 Pareto 最优解 x^* 在目标空间 \mathbb{R}^m 上的映射, 称为 Pareto 前沿(Pareto Front, PF), 或称真实 Pareto 前沿。

$$PF = \{f(x^*) \in \mathbb{R}^m|x^* \in PS\} \quad (10)$$

定义 9(参考集). 人为设定的参考点的集合称为参考集(Reference Set, R), 其中外部参考集不包括其他解集。

定义 10(Pareto 近似前沿). 在真实 Pareto 前沿上均匀采样得到一组参考点的集合称为 Pareto 近似前沿(Approximation of Pareto Front, P)。

定义 11(Pareto 极 endpoint). 在 Pareto 最优解集 PS 中的某个目标上不存在比解 x^* 更优的解, 则称解 x^* 为 Pareto 极 endpoint(Pareto Extreme Point), 记为 x^{ext*} 。所有 Pareto 极 endpoint 构成的集合称为 Pareto 极 endpoint 集, 记为 PBS。

$$PBS = \left\{ x^{ext*} \left| \begin{array}{l} x^{ext*} \in \Omega \exists k \in \{1, \dots, m\} \\ \wedge \nexists x^* \in \Omega: f_k(x^*) < f_k(x^{ext*}) \end{array} \right. \right\} \quad (11)$$

定义 12(Pareto 前沿边界). Pareto 极 endpoint 集 PBS 在目标空间 \mathbb{R}^m 上的映射称为 Pareto 前沿边界(Pareto Front Boundary, PFB), 简称边界。

$$PFB = \{f(x^{ext*}) \in \mathbb{R}^m|x^{ext*} \in PBS\} \quad (12)$$

定义 13(边界点). 在解集 S 中的某个目标上不存在比解 x 更优的解, 则称解 x 为边界点(Boundary Point), 或称为极 endpoint(Extreme Point), 记为 x^{ext} 。所有边界(极 endpoint)点构成的集合称为边界(极 endpoint)点集, 记为 BS。

$$BS = \left\{ x^{ext} \left| \begin{array}{l} x^{ext} \in S \exists k \in \{1, \dots, m\} \\ \wedge \nexists x \in S: f_k(x) < f_k(x^{ext}) \end{array} \right. \right\} \quad (13)$$

定义 14(理想点). 取解集 S 中各个目标上的最

小值组成一个新的点, 称为理想点(Ideal Point), 记为 z^* 。

$$z_i^* = \min f_i(x), x \in S, i \in \{1, \dots, m\} \quad (14)$$

定义 15(最低点). 取 Pareto 最优解集 PS 中各个目标上的最大值组成一个新的点, 称为最低点(Nadir Point), 记为 z^{nad} 。

$$z_i^{nad} = \max f_i(x^*), x^* \in PS, i \in \{1, \dots, m\} \quad (15)$$

假定表达式 $A \Rightarrow B$ 代表定义 B 以定义 A 为基础, 则上述 15 个定义存在如下的关系: $1 \Rightarrow \{2, 9\}$ 、 $2 \Rightarrow \{3, 5\}$ 、 $3 \Rightarrow 4$ 、 $\{2, 5\} \Rightarrow 6$ 、 $6 \Rightarrow 7$ 、 $4 \Rightarrow 8$ 、 $\{8, 9\} \Rightarrow 10$ 、 $4 \Rightarrow 11$ 、 $11 \Rightarrow 12$ 、 $5 \Rightarrow \{13, 14, 15\}$ 。

根据上述定义, 给出本文涉及的一些相关性质、定理及其数学证明:

性质 1. Pareto 近似最优解集是算法运行到最大进化代数时所求得解的有穷集合。

性质 2. 当 Pareto 前沿非离散时, Pareto 最优解集是实际问题所能求得的全部解的无穷集合。

性质 3(Pareto 前沿唯一性). 一个 MOPs 问题有且只有唯一的 Pareto 前沿(分段或不分段)。

证明. 即证一个 MOP 只存在唯一的 Pareto 最优解集, 假设存在两个在目标空间上的映射不尽相同的 Pareto 最优解集, 分别为 PS_1, PS_2 , 则必然 $\exists x^1 \in PS_1, \exists x^2 \in PS_2$ 使得 x^1, x^2 互不支配, 而 PS 中包含了所有非支配解, 故有 $PS = PS_1 \cup PS_2$, 即 PS_1 与 PS_2 都不是 Pareto 最优解集, 与假设矛盾, 假设不成立, 原命题得证。当涉及多模态多目标优化问题时, 该证明依然成立。证毕。

性质 3 的存在为定义 10 的 Pareto 近似前沿提供了人为采样的可行性。

性质 4. 一个 MOPs 问题可以存在多个 Pareto 近似前沿(分段或不分段), Pareto 近似前沿的表现形式为有穷的离散点。

性质 5. Pareto 边界点是 Pareto 最优解, 属于 Pareto 最优解集; 边界点是非支配解, 属于非支配解集。

$$x^{ext*} \in PBS \subseteq PS, x^{ext} \in BS \subseteq NS \quad (16)$$

性质 6. 人为定义的外部参考集 R 包括 Pareto 最优解集 PS 、Pareto 最优解 x^* 、Pareto 边界点以及通过 PS 计算出来的最低点 z^{nad} 。

$$PS \subseteq R, x^* \in R, x^{ext*} \in R, z^{nad} \in R \quad (17)$$

性质 7. 人为定义的外部参考集 R 不包括坐标轴原点、解集 S 中的解 x 和边界点 x^{ext} 以及通过解集 S 计算出来的理想点 z^* 。

$$(0, \dots, 0)_{m \times 1} \notin R, x \notin R, x^{ext} \notin R, z^* \notin R \quad (18)$$

定理 1(Pareto 支配定理). 若解 x^1 强支配解 x^2 , 则解 x^1 支配解 x^2 ; 若解 x^1 支配解 x^2 , 则解 x^1 弱支配解 x^2 .

$$x^1 \gg x^2 \rightarrow x^1 > x^2 \rightarrow x^1 \succcurlyeq x^2 \quad (19)$$

证明. 对于 $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, m\}$, 有:

$$(\forall i)f_i(x^1) < f_i(x^2)$$

$$\rightarrow (\forall i)f_i(x^1) \leq f_i(x^2) \wedge (\exists j)f_j(x^1) < f_j(x^2) \quad (20)$$

根据定义 2 有 $x^1 \gg x^2 \rightarrow x^1 > x^2$, 同理可证 $x^1 > x^2 \rightarrow x^1 \succcurlyeq x^2$. 证毕.

关于定理 1, 有如下推论: 若解 x^1 不弱支配解 x^2 , 则解 x^1 不支配解 x^2 ; 若解 x^1 不支配解 x^2 , 则解 x^1 不强支配解 x^2 . 即:

$$x^1 \not\succeq x^2 \rightarrow x^1 \not> x^2 \rightarrow x^1 \not\gg x^2 \quad (21)$$

定理 2(Pareto 最优解定理). Pareto 最优解集 PS 中的解始终不劣于 Pareto 近似最优解集 S 中的解.

$$\forall x^* \in PS, \forall x \in S: x^* \succcurlyeq x \quad (22)$$

证明. 假设 $\exists x: x > x^*$, 则有 $\exists x \in S \in \Omega: x > x^*$, 与定义 4 矛盾, 假设不成立. 证毕.

定理 3(非支配解存在定理). 一个解集 S 中至少包含一个非支配解:

$$|NS| \geq 1 \quad (23)$$

其中符号 $| \cdot |$ 表示该集合所包含的元素数量, 下同.

证明. 假设 $|NS|=0$, 则对于 $\forall x \in S, \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \forall k \in \{1, \dots, m\}$, 必有 $\exists k$ 使得 $f_k(x^i) > f_k(x^j)$ 或 $f_k(x^i) < f_k(x^j)$, 故 $F(x^i) \equiv F(x^j)$, 此时 S 中的解都为非支配解, $|NS| = |S| = N$, 与假设矛盾, 假设不成立. 证毕.

定理 3 的另一种证明方式可以参见文献[56].

综上, 本节对本文所涉及的部分相关定义、性质、定理进行了梳理.

3 评价指标

Deb 等人^[57]指出设计 MOEAs 的评价指标时, 应当考虑以下五个方面:

- (1) 评价指标的取值范围应当限定.
- (2) 评价指标的期望数值应当可知.
- (3) 指标数值与算法性能应当存在单调关系.
- (4) 评价指标应适用于不同目标维度的 MOPs.
- (5) 评价指标的计算复杂度不能太高.

为了衡量 MOEAs 的性能, 评价指标针对解集质量的一方面或多方面进行评估: 1) 解集 S 中非支配解的数量; 2) 解集 S 到真实 Pareto 前沿的收敛性; 3) 解集 S 到真实 Pareto 前沿的多样性.

根据评价指标评估所侧重的方面不同, 本文根

据评价机制将指标划分为计数指标、收敛性指标、多样性指标和综合性指标.

(1) 计数指标: 这类指标统计解集 S 中满足给定要求的非支配解的数量或比例.

(2) 收敛性指标: 这类指标衡量 Pareto 近似最优解集 S 到真实 Pareto 前沿的贴近程度.

(3) 多样性指标: 多样性可以进一步划分为解集的分布性与延展性^[18], 分布性衡量解集 S 在目标空间中分散的均匀程度, 延展性衡量解集 S 到真实 PF 极端值的贴近程度.

(4) 综合性(Comprehensive)指标: 同时衡量收敛性和多样性的指标称为综合性指标.

除此之外, 对于求解其他类型 MOPs 的 MOEAs, 如针对 PMOPs 的偏好多目标进化算法^{[58]-[60]}(Preference-Based MOEAs, PMOEAs), 针对 DMOPs 的动态多目标进化算法^[61-63](Dynamic MOEAs, DMOEAs), 针对 MMOPs 的多模态多目标进化算法^[64-66](Multimodal MOEAs, MMOEAs), 分别有专用的综合性指标.

(1) 偏好综合性指标: 应用于 PMOEAs, 在此类指标中更关注偏好区域内解集的质量, 而不考虑解集在全局 Pareto 前沿上的延展性.

(2) 动态综合性指标: 应用于 DMOEAs, 更关注在动态变化的 Pareto 前沿上衡量解集的收敛性与多样性, 并关注算法的求解效率.

(3) 多模态综合性指标: 应用于 MMOEAs, 比起衡量目标空间中解集的综合性能, 此类指标更关注决策空间中解集的最佳分布.

3.1 计数指标

计数指标统计解集 S 中满足给定要求的非支配解的数量或比例, 一个解是非支配解代表这个解是比较好的精英解^[4], 所以解集 S 拥有的非支配解数量或比例能在一定程度上反映 MOEAs 的优劣. 计数指标与非计数指标的重要区别是: 计数指标的取值范围是有穷的, 且解 x 的各目标值 $f_k(x)$ 只用于比较大小, 不直接参与数值的运算.

计数指标并不一定能反映解集的收敛性或多样性, 而是从支配的角度反映 MOEAs 的优劣. 假设存在两个解集 $S_1 = \{(4,0), (2,2), (0,4)\}, S_2 = \{(2,1), (1,1), (1,2)\}$, S_1 有 3 个非支配解但收敛性较差, S_2 只有一个非支配解但收敛性较好, 可见非支配解数量与算法的收敛性并不存在严格的一致性, 多样性同理. 从评价指标的发展来看, 这种不一致性也是计数指标的潜在缺陷.

Van Veldhuizen 等人^[22]提出了总非支配向量数目(Overall Nondominated Vector Generation, ONVG)等 5 个类似指标, ONVG 计算的是解集 S 中非支配解的数量, 定义如下:

$$\text{ONVG}(NS) = |NS| \quad (24)$$

其中 NS 代表的是 MOEAs 求解完成后解集 S 中所包含的全部非支配解, 下同。

总非支配向量数目比率^[22](Overall Non-dominated Vector Generation Ratio, ONVGR)计算的是非支配解的比率, 定义如下:

$$\text{ONVGR}(NS, P) = \frac{|NS|}{|P|} \quad (25)$$

其中 P 代表 Pareto 近似前沿, 是人为设定的参考集, 包含一组均匀分布的参考点, 下同。

类似地, 世代非支配向量数目^[22](Generational Nondominated Vector Generation)的定义如下:

$$\text{GNVG}(NS, t) = |NS(t)| \quad (26)$$

其中 $S(t)$ 代表的是代数 t 时解集 S 的状态。

GNVG 更多关注算法所求得的非支配解的数量变化, 与 ONVG 存在如下关系:

$$\text{GNVG}(NS, \text{Maxgen}) = \text{ONVG}(NS) \quad (27)$$

其中 Maxgen 代表的是人为设定的最大代数。

世代非支配向量数目比率^[22](Generational Nondominated Vector Generation Ratio, GNVGR)的定义如下:

$$\text{GNVGR}(NS, P, t) = \frac{|NS(t)|}{|P|} \quad (28)$$

GNVGR 与 ONVGR 存在如下关系:

$$\text{GNVGR}(NS, P, \text{Maxgen}) = \text{ONVGR}(NS, P) \quad (29)$$

非支配向量增量^[22](Nondominated Vector Additional, NVA)的定义如下:

$$\text{NVA}(NS, t) = \text{GNVG}(NS, t) - \text{GNVG}(NS, t - 1) \quad (30)$$

错误率 ER^[23]计算的是解集 S 中不在 Pareto 近似前沿 P 上的解的数量, 定义如下:

$$\text{ER}(S, P) = 1 - \frac{|S \cap P|}{|P|} \quad (31)$$

其中 $S \cap P$ 代表同时存在于解集 S 和 Pareto 近似前沿 P 所包含参考集中的解。

ONVG 系列指标越大代表解集质量越好, ER 越小代表解集质量越好。由于一些 MOEAs 在运行过程中会计算非支配解, 如 NSGA-II^[4], 故 ONVG 系列指标以及 ER 的计算复杂度都较低, 它们所能达到的最小计算复杂度为 $O(1)$, 最大为 $O(m|S|^2)$ 。

类似地有指标 $C1_R$ ^[67], 定义如下:

$$C1_R(S, R) = \frac{|S \cap R|}{|R|} \quad (32)$$

其中 R 为人为定义的参考集, 下同。

ER 在一定程度上与 Pareto 近似前沿 P 的信息进行了交互, 但问题是 Pareto 近似前沿 P 只是一组有穷的点, 而非离散的 Pareto 前沿中包含了无穷的点(性质 1), 所以即便解集 S 中包含 Pareto 最优解 x^* , Pareto 近似前沿 P 中也不一定包含 x^* , 容易导致 ER 的错误计算。 $C1_R$ 也有类似的问题。

$C2_R$ ^[67]通过修改计数方式解决了 ER 与 $C1_R$ 存在的问题, $C2_R$ 计算的是解集 S 中不受参考集 R 支配的个体数量, 定义如下:

$$C2_R(S, R) = \frac{|\{x \in S | \nexists r \in R: r \succ x\}|}{|S|} \quad (33)$$

$C2_R$ 计算的是解集 S 中被参考集 R 中的参考点所支配的解的数量。 $C2_R$ 的不足之处在于解集 S 的质量受参考集 R 的影响较大, 选取的参考集 R 越好, 越容易得出算法性能较差的结论, 反之则反。 $C1_R$ 和 $C2_R$ 越大代表解集质量越好, 它们的计算复杂度均为 $O(m|S| \cdot |R|)$ 。

与上述指标不同的是, 覆盖率 C ^[24]是一个二元指标, 需要至少两个 Pareto 近似最优解集 S_1 和 S_2 , Zitzler 等人^[50]指出, 没有一种一元指标或是一元指标的组合可以清晰地表明一个解集是否在 Pareto 支配的意义上优于另一个解集。

指标 C ^[24]计算的是解集 S_2 中的解至少被 S_1 中的一个解弱支配的比例, 衡量的是两个解集之间的重合程度, 定义如下:

$$C(S_1, S_2) = \frac{|\{x_2 \in S_2 | \exists x_1 \in S_1: x_1 \succ x_2\}|}{|S_2|} \quad (34)$$

$C \in [0, 1]$, 指标 C 的优势在于无需知道真实 Pareto 前沿信息且无需人为设定参考集。指标 C 的缺陷如图 1 所示, 解集 S_1 的质量优于解集 S_2 , 但 $C(S_1, S_2) = C(S_2, S_1) = 0.5$ 。指标 C 越大, 代表解集 S_1 的质量较解集 S_2 的质量越好, 指标 C 的计算复杂度为 $O(m|S_1| \cdot |S_2|)$ 。

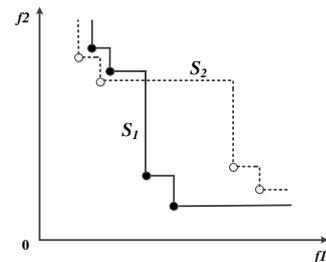


图 1 指标 C 的不足之处示意图^[52]

进一步地, Goh 等人^[68]提出了 n 元计数指标非支配比率(Nondominance Ratio, NR), 将 n 个不同的解集合并为一个解集, 该解集的所有非支配解构成集合 B , NR 计算的是某个解集的非支配解在集合 B 中所占比例, 解集 S_i 的 NR 值计算方式如下:

$$NR(S_1, S_2, \dots, S_n) = \frac{|B \cap S_i|}{|B|} \quad (35)$$

$$B = \{b | (\forall b) \exists x \in (S_1 \cup S_2 \dots \cup S_n) > b\} \quad (36)$$

其中 S_1, S_2, \dots, S_n 是分别由 n 个不同的 MOEAs 求解同一 MOPs 所得的解集。值得注意的是 $NR(S_1, S_2) \neq C(S_1, S_2)$, 因为指标 C 计算的是 S_1 较 S_2 的非支配解数量与 $|S_2|$ 的比, 而 NR 则计算了 $S_1 \cup S_2$ 的非支配解中来自解集 S_1 的比例。NR 越大代表解集 S_i 较其他解集的质量越好, 其计算复杂度为 $O(m \prod_{i=1}^n |S_i|)$ 。

MOEAs 所求得解集均具有一定的随机性, 二元及多元指标放大了这种随机性, 故使用这类指标作为算法性对比实验的评价指标时, 更适合计算其均值而不是方差。以指标 C 为例, 假设算法 1 运行四次求得四个解集按优劣程度排序依次为 S_{11} 、 S_{12} 、 S_{13} 与 S_{14} , 算法 2 也求得四个解集按优劣程度排序依次为 S_{21} 、 S_{22} 、 S_{23} 与 S_{24} , 如果调换算法 2 的解集顺序为 S_{24} 、 S_{23} 、 S_{22} 与 S_{21} , 可能会出现 2 个较小的指标 C 值与 2 个较大的指标 C 值, 导致其方差较大。

Wu 等人^[69]提出了计数指标不同数量选择(Number of Distinct Choices, NDC_μ), 将目标空间划分为边长为 $\frac{1}{\mu}$ 的网格, 衡量落在不同网格区域中解的数量, NDC_μ 的定义如下:

$$NDC_\mu(S, q) = \sum_{l_m=0}^{v-1} \dots \sum_{l_2=0}^{v-1} \sum_{l_1=0}^{v-1} NT_\mu(S, q) \quad (37)$$

其中 $q = (q_1, q_2, \dots, q_m)$, $q_i = \frac{l_i}{v}$, $v = \frac{1}{\mu}$, NT_μ 判断是否有个体落在网格 T 内, 定义如下:

$$NT_\mu(S, q) = \begin{cases} 1, & x \in T_\mu(q) \\ 0, & x \notin T_\mu(q) \end{cases} \quad (38)$$

类似地有指标簇^[69](Cluster, CL_μ), 定义如下:

$$CL_\mu(S, q) = \frac{|S|}{NDC_\mu(S, q)} \quad (39)$$

NDC_μ 越大代表解集 S 的质量越好, CL_μ 越小代表解集 S 的质量越好, 它们的计算复杂度均为 $O(\mu^m |S|)$ 。

随着 MOEAs 的发展, 计数指标越来越少作为

MOEAs 性能对比仿真实验时的评价指标, 这是因为在一些低维的 MOPs 上, 如 ZDT 系列测试问题^[70]或 DTLZ 系列测试问题^[71]的 2、3 维度上, 一些 MOEAs 能够求得大部分甚至全部的非支配解; 随着目标维度的增加, MOPs 由于 Pareto 前沿自身形态的扩张^[44], 也会导致非支配解的大量增加。所以仅靠计算解集 S 中非支配解的数量或比例已经无法满足区分算法优劣程度的需求, 因此迫切需要一种全新类型的评价指标来衡量不同的 MOEAs 的性能。

3.2 收敛性指标

Fogel^[72]证明了当满足种群个体的进化序列单调的条件时, 进化算法(Evolution Algorithms, EAs)在 SOP 上会以概率 1 收敛, Rudolph^[73]则通过马尔可夫链^[74](Markov Chain)证明了当 MOEAs 基于 Pareto 等级排名且单调筛选解集时, 该 MOEAs 在 MOPs 上以概率 1 收敛。故有如下定义:

定义 16(收敛)^[75]. 当进化代数 $t \rightarrow \infty$ 时, 若某个 MOEA 满足解集 S 中的解 x 到 Pareto 真实前沿的距离以概率 1 趋向于 0, 则称该 MOEA 收敛。

收敛性指标大多通过计算解集 S 到 Pareto 近似前沿 P 或参考集 R 的距离, 来反映解集 S 到真实 Pareto 前沿的贴近程度, 不同指标所选取的距离类型不同。收敛性指标也大多需要参考集进行对照, 即外部参考集或另一个解集。解集 S 的收敛性越好则表明 MOEAs 的收敛性越好。

最为经典的收敛性指标是世代距离 GD^[25], 原始的 GD 定义如下:

$$GD(S, P) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{|S|} d_i^2}{|S|}} \quad (40)$$

其中 $d_i = \min_{p \in P} \|F(x^i) - F(p)\|$, $x^i \in S$, d_i 计算的是 x^i

与 Pareto 近似前沿 P 上相距最近的参考点 p 之间的欧式距离。符号 $\|A - B\|$ 表示两元素之间的欧氏距离, 下同。

值得注意的是, GD 计算的并非解集 S 到真实 Pareto 前沿上相距最近参考点 p 的欧式距离, 而是欧式距离平方和的开方。

为了说明一些收敛性指标的计算过程, 假设存在一组 MOPs 的表达式如下:

$$f_1^p + f_2^p + \dots + f_m^p = 1 \quad (41)$$

其中 $f_k \in [0, 1]$, $k \in \{1, \dots, m\}$, 参数 $p \in (0, \infty)$ 用于控制真实 Pareto 前沿的形状, 如当 $m = 3$, 且 p 分别取 0.5, 1, 2 时, Pareto 前沿的形状分别为凸曲面、

平面、凸曲面。

取 $m = 2, p = 1$ ，即前沿表现形式为直线的多优化问题 $f_1 + f_2 = 1$ 。假设存在一个包含三个解的解集 $S = \{(0, 1), (1, 1), (1, 0.5)\}$ ，且在真实 Pareto 前沿上均匀采样而得 Pareto 近似前沿 $P = \{(0, 1), (0.25, 0.75), (0.5, 0.5), (0.75, 0.25), (1, 1)\}$ ，则 GD 的计算过程如下所示：

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{(0-0)^2 + (1-1)^2} = 0 \\ d_2 &= \sqrt{(1-0.5)^2 + (1-0.5)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ d_3 &= \sqrt{(1-0.75)^2 + (0.5-0.25)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \text{GD}(S, P) &= \frac{(\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2})}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad (42) \end{aligned}$$

而解集 S 到 Pareto 近似前沿 P 的平均距离为：

$$\bar{d}(S, P) = \frac{(d_1 + d_2 + d_3)}{3} = \frac{\sqrt{2}}{4} \neq \text{GD}(S, P) \quad (43)$$

GD 的扩展形式^[16]定义为：

$$\text{GD}(S, P, q) = \frac{(\sum_{i=1}^{|S|} d_i^q)^{\frac{1}{q}}}{|S|} \quad (44)$$

一般情况下规定 $q = 2$ ，即：

$$\text{GD}(S, P) = \text{GD}(S, P, 2) \quad (45)$$

当设置的参考点较少时，GD 存在不足之处，如图 2 所示：解 a 为非支配解，但与参考点的距离较远；解 b 受解 a 支配，但与参考点的距离较近。在离散的优化问题中，该不足之处更为突出。

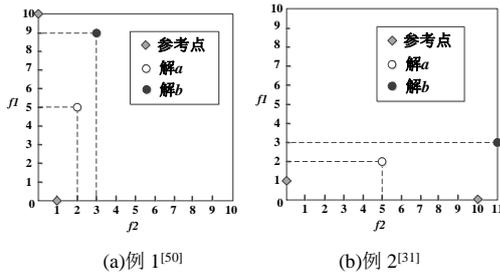


图 2 GD 的不足之处示意图^[76]

Ishibuchi 等人^[76]针对 GD 的不足提出了 GD^+ ，在计算解 x 到参考点 p 的距离时考虑了两者的支配关系， GD^+ 与 GD 的区别在于对距离的定义：

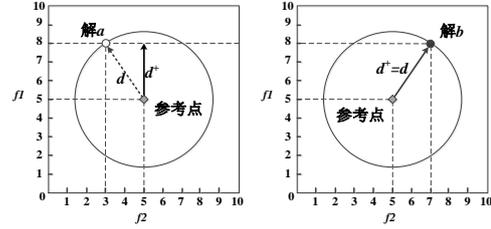
$$\text{GD}^+(S, P) = \frac{d^+}{|S|} \quad (46)$$

其中 $d^+ = \sqrt{\sum_{i=1}^{|S|} (d_i^+)^2}$ ，若是最小化问题则 $d_i^+ =$

$\max_{p \in P} \{x_j^i - p_j\}$ ， $x^i \in S, j \in \{1, \dots, D\}$ ， D 为决策变量的

维数，若是最大化问题则 $d_i^+ = \max_{p \in P} \{p_j - x_j^i\}$ ， $x^i \in$

$S, j \in \{1, \dots, D\}$ 。在图 2 的例 1 中解 a 和 b 的 GD^+ 值分别为 2 和 3，例 2 中为 2 和 3.162， GD^+ 值的大小与支配关系保持一致。 d^+ 的计算方式如图 3 所示。



(a)参考点不支配解 (b)参考点支配解

图 3 d^+ 的计算方式示意图^[76]

与 GD 相似的还有指标 γ ^[26]与 M_1^* ^[27]：

$$\gamma(S, P) = M_1^*(S, P) = \frac{\sum_{i=1}^{|S|} d_i}{|S|} \quad (47)$$

故有如下关系：

$$\text{GD}(S, P, 1) = \gamma(S, P) = M_1^*(S, P) = \bar{d}(S, P) \quad (48)$$

GD、 GD^+ 、指标 γ 与 M_1^* 越小代表解集 S 的收敛性越好，它们的计算复杂度均为 $O(m|S| \cdot |P|)$ 。

Van Veldhuizen 等人^[25]提出了收敛性指标相对概率(Relative Possible, RP)，用于衡量进化过程中的相对 GD 值，定义如下：

$$\text{RP}(S, P, t) = \ln \sqrt{\frac{\text{GD}_1(S, P)}{\text{GD}_t(S, P)}} \quad (49)$$

其中 $\text{GD}_1(S, P)$ 为代数为 1 时的 GD 值， GD_t 为代数为 t 时的 GD 值。RP 越大代表解集 S 的收敛性越好，其计算复杂度为 $O(m|S| \cdot |P|)$ 。

七点平均距离 SPAD^[28]计算的是参考集 R 到解集 S 之间的欧式距离，定义如下：

$$\text{SPAD}(R, S) = \frac{\sum_{i=1}^{|R|} d_i}{|R|} \quad (50)$$

其中 $d_i = \min_{x \in S} \|F(r^i) - F(x)\|$ ， $r^i \in R$ ，参考集 R 中的

七个点分别为： $(0, \frac{1}{3}f_2^{\max})$ ， $(0, \frac{2}{3}f_2^{\max})$ ， $(0, f_2^{\max})$ ，

$(0, 0)$ ， $(\frac{1}{3}f_1^{\max}, 0)$ ， $(\frac{2}{3}f_1^{\max}, 0)$ ， $(0, f_1^{\max})$ ，其中

f_1^{\max} 和 f_2^{\max} 分别代表真实 Pareto 前沿中的最大值与最小值， $(0, f_1^{\max})$ 和 $(0, f_2^{\max})$ 分别为 Pareto 边界点(定义 13)。SPAD 越小代表解集 S 的收敛性越好，其计算复杂度为 $O(m|S|)$ 。

SPAD 较上述指标优势在于它不依赖 Pareto 近

似前沿 P 的信息,但 SPAD 只适用于 2 维的目标优化问题。SPAD 与 GD 所选取的参考集和计算方式均不同, GD 计算的是解 x 到 Pareto 近似前沿 P 上的参考点 p 之间的距离, SPAD 计算的是从参考集 R 中的参考点 r 到解 x 的距离。

Zitzler 等人^[50]提出了二元收敛性指标 I_ε , 计算的是使得 $S_1 \supseteq S_2$ 所需的最小 ε 值, 定义如下:

$$I_\varepsilon(S_1, S_2) = \inf_{\varepsilon \in \mathbb{R}} \{ \forall x^2 \in S_2 | \exists x^1 \in S_1: x^1 \succeq_\varepsilon x^2 \} \quad (51)$$

其中 $x^1 \succeq_\varepsilon x^2$ 当且仅当满足:

$$(\forall i) f(x_i^1) \leq \varepsilon \cdot x_i^2 f(x_i^2), i \in \{1, \dots, m\} \quad (52)$$

当解 $x^1 \succ x^2$ 意味着 $\varepsilon < 1$ 。

类似地有二元收敛性指标 $I_{\varepsilon+}$ ^[50], 定义如下:

$$I_{\varepsilon+}(S_1, S_2) = \inf_{\varepsilon \in \mathbb{R}} \{ \forall x^2 \in S_2 | \exists x^1 \in S_1: x^1 \succeq_{\varepsilon+} x^2 \} \quad (53)$$

其中 $x^1 \succeq_{\varepsilon+} x^2$ 当且仅当满足:

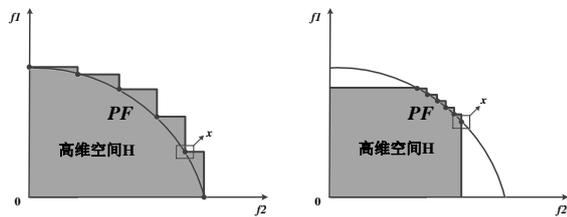
$$(\forall i) f(x_i^1) \leq \varepsilon + f(x_i^2), i \in \{1, \dots, m\} \quad (54)$$

指标 I_ε 、 $I_{\varepsilon+}$ 越小代表解集 S_1 较解集 S_2 的收敛性越好, 它们的计算复杂度均为 $O(m|S_1| \cdot |S_2|)$ 。

Zitzler 等人^[24]提出了收敛性指标, Van Veldhuizen^[77]将其命名为高维空间(Hyperarea, H), 计算的是解 x 所覆盖的空间, 该指标与超体积指标 HV 不同, HV 计算的是非支配解 x 所支配的空间。指标 H 的定义如下:

$$H(S) = \text{volume} \left(\bigcup_{i=1}^{|S|} a^i \right) \quad (55)$$

其中 a^i 是由解 x 与坐标轴原点作为对角线构成的超立方体, a^i 所覆盖的空间大小为 $\text{volume}(a^i)$ 。对于 PF 为非凸的 MOPs, 指标 H 存在一定的误差^[24]。



(a)解集多样性好但指标 H 较大 (b)解集多样性差但指标 H 较小

图 4 指标 H 为收敛性指标而非综合性指标说明

指标 H 越小越好。图 4 表明了指标 H 是收敛性指标而非综合性指标, 其中阴影部分面积为指标 H 在 2 维 MOPs 上的值。图 4(a)中的解集多样性较好, 但是指标 H 较大, 图 4(b)中的解集多样性较差, 指标 H 反而较小, 故指标 H 无法衡量多样性。

Zitzler^[27]提出了二元收敛性指标覆盖差异(Coverage difference, D), 定义如下:

$$D(S_1, S_2) = H(S_1 \cup S_2) - H(S_2) \quad (56)$$

D 的计算方式如图 5 所示, 以 2 维的 MOPs 为例, $D(S_1, S_2) = \alpha$, $D(S_2, S_1) = \beta$ 。此外也可计算得 $H(S_1) = \alpha + \gamma$, $H(S_2) = \beta + \gamma$ 。 α, β, γ 分别为三部分的阴影面积。

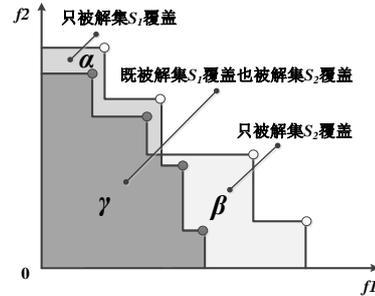


图 5 指标 D 的计算方式示意图^[27]

为了消除目标空间上每一维度取值范围不同的问题, Van Veldhuizen^[77]进一步提出了高维空间比率(Hyperarea ratio, HR), 其定义如下:

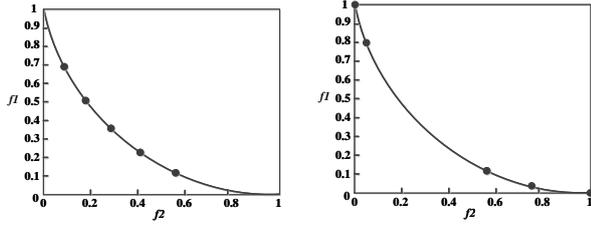
$$\text{HR}(S, P) = \frac{H(S)}{H(P)} \quad (57)$$

指标 H、HR 越小代表解集 S 的收敛性越好, 指标 D 越小代表解集 S_1 较解集 S_2 的收敛性越好, 指标 H、D 的计算复杂度均为 $O(|S|^{m-1})$, 由于 $|P| \gg |S|$, 故 HR 的计算复杂度为 $O((|S| + |P|)^{m-1}) = O(|P|^{m-1})$, 其他评价指标的计算复杂度出现 $|S|$ 和 $|P|$ 相加的情况也可以如此计算。

收敛性指标的出现能够在很大程度上反映 MOEAs 的性能优劣, 但是由于 MOPs 存在边界(定义 12)等难优化区域^[78], 即便算法所求得解集 S 中的解大部分甚至全部落在了真实 Pareto 前沿上, 算法也仍然有较大的提升空间, 因此需要多样性指标进一步衡量解集的优劣性。

3.3 多样性指标

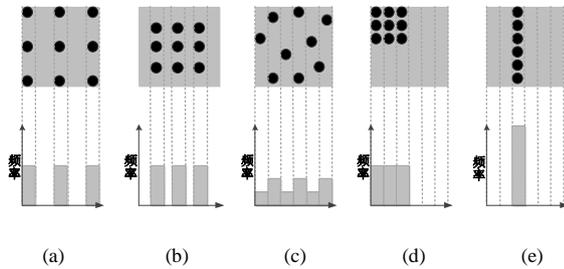
多样性指标衡量解集 S 的分布性与延展性, 如图 6 说明了多样性中分布性与延展性的差异, 黑点为 MOEAs 求得的解, 曲线为 Pareto 前沿。图 6(a)中的解集分布均匀, 具有良好的分布性, 但该解集在 Pareto 前沿的边界区域的分布过于稀疏, 其延展性较差; 图 6(b)中的解集则具有良好的延展性但其分布性较差。因此图 6 中的这两个解集都不具备良好的多样性。



(a)分布性好延展性差 (b)分布性差延展性好

图6 多样性评价指标的分布性与延展性^[18]

Wang 等人^[79]受生物多样性的启发,认为多样性与均匀性(Uniformity)存在一定的差异,如图7说明了两者之间的不同,柱形图代表的是某一目标函数在各取值上出现的频率。当解集分布如图7(a)所示时,现有的大多数多样性指标会达到最优的指标值,而 Wang 等人^[79]认为图7(c)的多样性比图7(a)的多样性更佳。



(a) (b) (c) (d) (e)

图7 多样性与均匀性的差异^[79](a)均匀性好多样性相对较差 (b)均匀性好延展性差(c)均匀性相对较差多样性好(d)均匀性好多样性差(e)均匀性好多样性特别差

3.3.1 只衡量分布性的多样性指标

Deb 等人^[26]提出了指标 Δ' ,通过比较每个连续解之间的距离来衡量算法的分布性,定义如下:

$$\Delta'(S) = \sum_{i=1}^{|S|-1} \frac{(d_i - \bar{d})}{|S| - 1} \quad (58)$$

其中 $d_i = \|F(x^i) - F(x^{i+1})\|, i \in \{1, \dots, m-1\}$ 计算的是两个连续的解之间的欧氏距离。 $\bar{d} = \frac{d_i}{|S|-1}$

计算的是 d_i 的均值,当所有解相距其他解的距离相同时,即 $d_i \equiv \bar{d}$,此时 $\Delta'(S) = 0$,分布性达到最佳。 Δ' 只适用于2维的目标优化问题,因为当目标数量大于等于3时难以定义两个解之间的连续关系。

类似地,有空间指标 SP^[28],定义如下:

$$SP(S) = \sqrt{\sum_{i=1}^{|S|} \frac{(d_i - \bar{d})^2}{|S| - 1}} \quad (59)$$

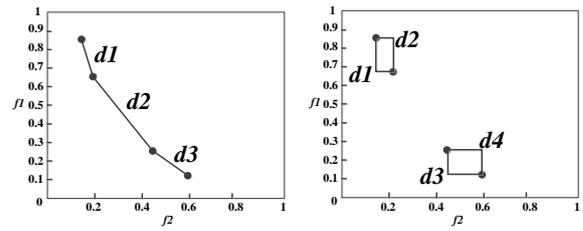
Δ' 和 SP 除了数学表达式上的不同外,最大的不同在于 d_i 的选择与距离计算方式, Δ' 中 d_i 计算的

是连续解之间的距离,SP中 d_i 计算的是相距最近的两个解之间的距离。

SP中 d_i 的计算方式如下:

$$d_i = \min_{x^j \in S, x^i \neq x^j} \left(\sum_{k=1}^m |F_k(x^i) - F_k(x^j)| \right) \quad (60)$$

由公式(60)可见 SP 中 d_i 的计算方式不是欧式距离,而是 x^i 和 x^j 之间的曼哈顿距离。图8表明了这两个评价指标对 d_i 的选择与计算的差异, Δ' 选择了3段 d_i ,计算的是欧式距离;SP选择了4段 d_i ,计算的是曼哈顿距离。



(a) Δ' 中 d_i 的选择与计算 (b)SP中 d_i 的选择与计算

图8 Δ' 和 SP中 d_i 选择与计算

故对于 Pareto 前沿为分段函数的 MOPs,如 ZDT3^[70],当解集均匀分布在整个 Pareto 前沿上时,其 Δ' 依然会较大,而 SP 会变得很小。 Δ' 与 SP 越小代表解集S的分布性越好,它们的计算复杂度均为 $O(m|S|^2)$ 。

Srinivas 等人^[80]提出了分布性指标 χ^2 (或记为 ι),计算的是解集S的卡方分布,定义如下:

$$\chi^2(S, q) = \sqrt{\sum_{i=1}^{q+1} \left(\frac{n_i - \bar{n}_i}{\sigma_i} \right)^2} \quad (61)$$

其中 q 是期望的最优解数目。将目标空间划分为 $q+1$ 个区域, n_i 是落在第 i 个子区域内解 x 的数量, σ_i^2 则是该子区域内解 x 数量的方差。 χ^2 越小代表解集S的分布性越好,其计算复杂度为 $O(m|S|^2)$ 。

Zitzler^[27]提出了指标 M_2^* ,指标 M_2^* 计算的是解集S中处于同一个小生境(Niche)范围内解的比例:

$$M_2^*(S, \sigma) = \frac{\sum_{x^1 \in S} |\{x^2 \in S | \|x^1 - x^2\| < \sigma\}|}{|S| - 1} \quad (62)$$

其中 σ 是人为指定的参数,代表小生境的范围,小生境是指目标空间中相距较近的一群解,以模拟自然界生物中“物以类聚”的现象。指标 M_2^* 越大代表解集S的分布性越好,其计算复杂度为 $O(m|S|^2)$ 。

Tan 等人^[55]提出了均匀分布指标(Uniform Distribution, UD),定义如下:

$$UD(S) = \frac{1}{1 + S_{nc}} \quad (63)$$

其中参数 S_{nc} 代表的是在小生境中非支配解的数量
的标准差, S_{nc} 的定义如下:

$$S_{nc} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{|S|} (nc(x^i) - \bar{nc}(x))^2}{|S| - 1}}$$

$$nc(x^i) = |\{x^j \in S \mid \|x^i - x^j\| < \sigma \wedge i \neq j\}| \quad (64)$$

其中 $\bar{nc}(x) = \frac{\sum_{i=1}^{|S|} nc(x^i)}{|S|}$, σ 代表小生境的范围。UD
越小代表解集 S 的分布性越好, 其计算复杂度为
 $O(m|S|^2)$ 。

3.3.2 只衡量延展性的多样性指标

指标 M_3^* ^[27]与 M_2^* 不同, 不衡量分布性而只衡量
延展性, 计算的是解集 S 中在每个目标上相距最远
的个体之间的距离之和, 定义如下:

$$M_3^*(S) = \sqrt{\sum_{k=1}^m \max \|f_k(x^i) - f_k(x^j)\|} \quad (65)$$

类似地有最大延展度 MS ^[48]:

$$MS(S) = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \delta_k} \quad (66)$$

其中 δ_k 的定义如下:

$$\delta_k = \left(\frac{\min(f_k^{max}, F_k^{max}) - \max(f_k^{min}, F_k^{min})}{F_k^{max} - F_k^{min}} \right)^2 \quad (67)$$

其中 f_k^{max}, f_k^{min} 是解集 S 在第 k 个目标上的最大值与
最小值, F_k^{max}, F_k^{min} 是 Pareto 最优解集 PS 在第 k 个
目标上的最大值与最小值。

总 Pareto 延展度^[69](Overall Pareto Spread, OS)
计算的是解集 S 中在每个目标上相距最远的个体之
间的距离乘积, 定义如下:

$$OS(S) = \frac{\prod_{k=1}^m \left| \max_{x \in S} f_k(x) - \min_{x \in S} f_k(x) \right|}{\prod_{k=1}^m |f_k(z^{nad}) - f_k(z^g)|} \quad (68)$$

其中 $z^g = \min f_i(x^*), x^* \in PS, i \in \{1, \dots, m\}$, z^{nad} 见
定义 15, z^g 与理想点 z^* (定义 14)不同。

Li 等人^[81]则提出了一种基于超体积指标的分布
广度指标(Spread Indicator, SI)。通过投影并计算
在低一维的解集 S 中边界集 BS (定义 13)与参考点
的超体积, 来评估边界解集 S 的分布广度。

上述 4 个指标越大代表解集 S 的延展性越好,
 MS 和 OS 的计算复杂度为 $O(m|S|)$, M_3^* 的计算复杂
度为 $O(m|S|^2)$, SI 的计算复杂度为 $O(|S|^{m-1})$ 。

3.3.3 同时衡量分布性和延展性的多样性指标

Deb 等人^[26]在 Δ' 的基础上提出了指标 Δ :

$$\Delta(S, P) = \frac{d_f + d_l + \sum_{i=1}^{|S|-1} |d_i - \bar{d}|}{d_f + d_l + (|S| - 1)\bar{d}} \quad (69)$$

其中 d_i 是两个连续解之间的欧式距离, \bar{d} 是 d_i 的均
值, 具体定义等同于 Δ' 中的 d_i 与 \bar{d} 。引入 d_f 和 d_l
是为了衡量解集的延展性, 它们计算的是距离解集 S
与 Pareto 边界点之间的最小距离。 Δ 和 Δ' 一样只适
用于 2 维的目标优化问题。

Zhou 等人^[29]提出指标 Δ^* , 不再使用连续的解
计算 d_i , 而是用相距最近的两个解计算 d_i , 并改进
了关于 d_f 和 d_l 的计算方式, 定义如下:

$$\Delta^*(S, P) = \frac{\sum_{k=1}^m d(x^{ext^*}, S) + \sum_{i=1}^{|S|} |d_i - \bar{d}|}{\sum_{k=1}^m d(x^{ext^*}, S) + |S|\bar{d}} \quad (70)$$

其中 $d(x^{ext^*}, S) = \min_{x \in S} \|f_k(x^{ext^*}) - f_k(x)\|$, $x^{ext^*} \in$
 PS , 计算的是在第 k 个目标上 Pareto 边界点到解集
 S 的最小距离。 Δ^* 中的 d_i 计算方式如下:

$$d_i = \min_{x^j \in S, x^i \neq x^j} (\|F(x^i) - F(x^j)\|) \quad (71)$$

Ibrahim 等人^[82]提出了线性分布 (Line
Distribution, Δ_{Line}), 用参数 β 将 $[0, 1]$ 的空间均匀地
划分成了 N 等份, 定义如下:

$$\Delta_{Line}^i(S, \beta) = \frac{\sum_{j=1}^{|\beta|} \min_{x \in S} |\beta_j - F_i(x)|}{|\beta|} \quad (72)$$

$$\Delta_{Line}(S, \beta) = \frac{\sum_{i=1}^m \Delta_{Line}^i(S, \beta)}{m} \quad (73)$$

Δ_{Line} 的优势在于无需知道真实 Pareto 前沿信
息。 Δ 、 Δ^* 与 Δ_{Line} 越小代表解集 S 的多样性越好, Δ
与 Δ^* 的计算复杂度均为 $O(m|S|^2 + m|S| \cdot |P|) =$
 $O(m|S| \cdot |P|)$, Δ_{Line} 的计算复杂度为 $O(m|S|^2)$ 。

Cai 等人^[83]提出了 DIR, 用 M 个权重向量将目
标空间均匀地划分成了 $M - 1$ 份, 定义如下:

$$DIR(S) = \frac{DIR^*}{DIR_{max}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{|S|} \sum_{i=1}^{|S|} (c_i - \text{mean}(c))^2}}{\frac{|M|}{|S|} \sqrt{|S| - 1}} \quad (74)$$

其中 c 是覆盖向量, c_i 计算的是距离解 x^i 最近的权重
向量个数, $\text{mean}(c) = \frac{1}{|S|} \sum_{i=1}^{|S|} c_i$ 。DIR 越小代表解
集 S 的多样性越好, 计算复杂度为 $O(m|S| \cdot |M|)$ 。

Wang 等人^[79]提出纯粹距离(Pure Distance, PD)
应对高维目标优化问题^[84](Many-objective Problems,

MaOPs), 通过计算解 x 与解集 S 的不相似度来衡量解集的多样性, 定义如下:

$$PD(S) = \max_{x^i \in S} (PD(S - x^i) + d(x^i, S - x^i)) \quad (75)$$

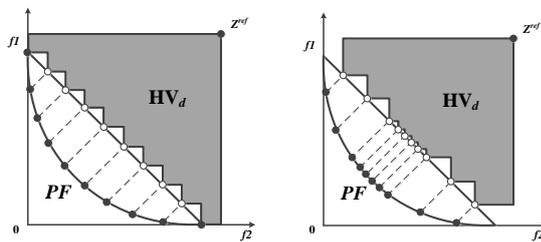
其中 d 的计算方式如下:

$$d(x, S) = \min_{x^i \in S} (dissimilarity(x, x^i)) \quad (76)$$

其中 $dissimilarity$ 的计算过程可以参见文献[79], PD 越大代表解集 S 多样性越好, PD 的计算复杂度为 $O(m|S|^2)$ 。

Jiang 等人^[85]提出了 HV_d , 用超体积评估解集 S 的多样性, 将解集 S 投影到线性的 Pareto 近似前沿后, 再进行 HV 值的计算。

HV_d 的计算方式如图 9 所示, 阴影部分面积为 HV_d 在 2 维 MOPs 上的值。图 9(a)的阴影面积较大解集多样性较好, 图 9(b)的阴影面积较大解集多样性较差。需要说明的是, HV_d 无法衡量收敛性, 如解 x 在连接该解和投影点之间的虚线上移动时并不会改变 HV_d 的值, 故 HV_d 仅可衡量多样性, 并非综合性指标。 HV_d 越大代表解集 S 多样性越好, HV_d 的计算复杂度为 $O(m|S|^{m-1})$ 。



(a)解集多样性较好 (b)解集多样性较差

图 9 指标 HV_d 的计算方式示意图^[85]

Tian 等人^[86]提出了 Pareto 前沿覆盖范围 (coverage over the Pareto front, CPF), CPF 将解集 S 中的解 x 替换为 Pareto 近似前沿上距离该解最近的点, 并将新解集 S' 投影到低一维的空间, 计算的是投影后超立方体的覆盖空间。CPF 需要知道真实 Pareto 前沿的信息, 其值越大代表解集 S 的多样性越好, 由于 $|P| \gg |S|$, 故其计算复杂度为 $O(m|P|^2)$ 。

此外, 还有一些计算过程较为复杂的多样性指标, 比如基于网格的 \bar{D} ^[57]、DCI^[87]和 M-DI^[88], 将目标空间均匀地划分成若干网格, 并根据网格内解的数量来衡量解集的多样性; 基于信息熵的指标 E^[89]和 CE^[90], 通过影响函数来估计解集密度, 并通过 Shannon 函数计算个体信息熵; 基于角度的指标 D_σ ^[91]和 D'_σ ^[92]减弱了因收敛性不同而对多样性评

价产生的影响, 设立一组经过原点的参考向量并以此计算非支配解覆盖空间的比例。它们的缺陷均在于参数难以设定且计算复杂度高, 它们的指标值越大代表解集 S 多样性越好。

3.4 综合性指标

综合性指标能够同时衡量解集的收敛性与多样性。解集 S_1 在某综合性指标的数值上优于解集 S_2 , 意味着解集 S_1 在收敛性或多样性上优于解集 S_2 , 并有可能在两种性能上同时优于解集 S_2 。

3.4.1 通用的综合性指标

Coello Coello 等人^[30]于 2005 年提出了综合性指标反世代距离 IGD, 计算的是 Pareto 近似前沿 P 上每个参考点到解集 S 中相距最近的解的平均距离, IGD 的定义如下:

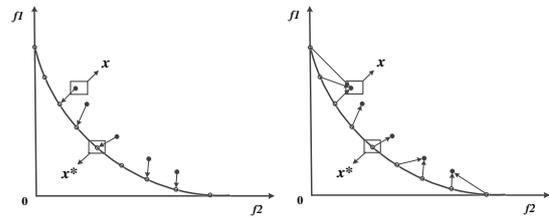
$$IGD(P, S) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{|P|} d_i^2}}{|P|} \quad (77)$$

其中 $d_i = \min_{x \in S} \|F(p^i) - F(x)\|$, $p^i \in P$, d_i 计算的是 Pareto 近似前沿 P 上的参考点 p 与最近的解 x^i 之间的欧式距离。

在书籍^[16]以及在基于 Matlab 的 MOEAs 平台 PlatEMO^[93]的现有版本中, 在计算 IGD 时均使用欧式距离而非欧式距离的平方, 故不妨类比 GD 定义 IGD 的扩展形式^[18]:

$$IGD(P, S, q) = \frac{(\sum_{i=1}^{|P|} d_i^q)^{\frac{1}{q}}}{|P|} \quad (78)$$

图 10 说明了 GD 与 IGD 的计算方式的差别。GD 是收敛性指标而 IGD 是综合性指标, 这是因为当解集多样性不佳时, GD 依然可以得到较好的指标值, 而 IGD 的部分参考点具有较大的值, 导致 IGD 所得数值较差。



(a) GD 计算方式示意图 (b) IGD 计算方式示意图

图 10 GD 与 IGD 计算方式示意图

Czyżak 等人^[94]早在 IGD 提出的 7 年前就提出了 Dist1, 计算方式类似于 IGD, 不同之处在于 Dist1 计算的距离是某目标上的最大值:

$$\text{Dist1}(P, S) = \frac{\sum_{i=1}^{|P|} c_i(P, S)}{|P|} \quad (79)$$

$$c_i(P, S) = \max_{k \in \{1, \dots, m\}} \{0, w_k(f_k(p) - f_k(x))\} \quad (80)$$

其中 w_k 为 Pareto 前沿在该目标上最大值的倒数,用于归一化操作。

即有如下关系:

$$\text{IGD}(P, S, 1) = \bar{d}(P, S) \neq \text{Dist1}(P, S) \quad (81)$$

当设置的参考点较少时, IGD 的不足之处类似于 GD, 如图 11 所示, 解集 S_2 中的解均受解集 S_1 中的解支配, 故解集 S_1 的质量优于解集 S_2 , 但通过比较 IGD 值会得出相反的结论。

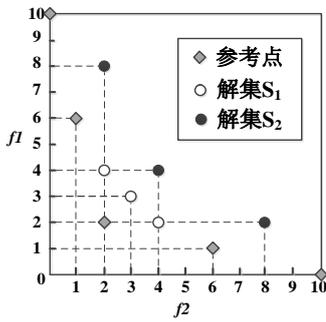


图 11 IGD 的不足之处示意图^[76]

IGD^+ ^[76]弥补了上述不足, 在计算参考点 p 到解 x 的距离时考虑了两者的支配关系, 定义如下:

$$\text{IGD}^+(P, S) = \frac{d^+}{|P|} \quad (82)$$

其中 $d^+ = \sqrt{\sum_{i=1}^{|P|} (d_i^+)^2}$, 若是最小化问题则 $d_i^+ = \max_{x \in S} \{x_j - p_j^i\}$, $p^i \in P, j \in \{1, \dots, D\}$, D 为决策变量的维数, 若是最大化问题则 $d_i^+ = \max_{x \in S} \{p_j^i - x_j\}$, $p^i \in P, j \in \{1, \dots, D\}$, d^+ 的计算方式可参考 3.2 节的图 3。

类似地, Dilettoso 等人^[95]提出了近似度(Degree of Approximation, DOA), 计算方式与 IGD^+ 相同。

Ibrahim 等人^[82]提出了目标 IGD(Objective-wise IGD, ObjIGD), 计算的距离是各目标上的差值:

$$\text{ObjIGD}_i(P, S) = \frac{\sum_{p \in P} \min_{x \in S} |F_i(p) - F_i(x)|}{|P|} \quad (83)$$

$$\text{ObjIGD}(P, S) = \frac{\sum_{i=1}^m \text{ObjIGD}_i(P, S)}{m} \quad (84)$$

Tian 等人^[96]提出了检测非贡献解的 IGD 指标 (IGD with noncontributing solution detection, IGD-NS), 定义如下:

$$\text{IGD-NS}(P, S) = \sum_{p \in P} \min_{x \in S} d(p, x) + \sum_{x \in S'} \min_{p \in P} d(x, p) \quad (85)$$

其中 d 计算的是欧式距离, 集合 S' 中包含了不参与 IGD 值计算的解, 即在使用 IGD-NS 时解集 S 中的所有解均参与指标值的运算。

Schutze 等人^[31]提出了平均豪斯多夫距离 Δ_p , 该指标结合了 GD 与 IGD, 定义如下:

$$\Delta_p(S, P, q) = \max(\text{GD}_p(S, P, q), \text{IGD}_p(P, S, q)) \quad (86)$$

假设解 x 与 Pareto 近似前沿 P 的距离为 1, 则:

$$\text{GD}(S, P, q) = \frac{\sqrt[q]{1^q + \dots + 1^q}}{|S|} = \frac{\sqrt[q]{N}}{N} \quad (87)$$

故当解数量增多时解集 S 的 GD 值会减小, 且有:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{GD}(S, P, q) = 0 \quad (88)$$

但对于每个解 x 而言, 其 GD 值并不会随着解数量的增加而改变, IGD 同理, 因此修改 GD 与 IGD 为 GD_p 与 IGD_p 。它们的定义分别为:

$$\text{GD}_p(S, P, q) = \left(\frac{1}{|S|} \sum_{x \in S} \min_{p \in P} d^q(x, p) \right)^{\frac{1}{q}} \quad (89)$$

$$\text{IGD}_p(P, S, q) = \left(\frac{1}{|P|} \sum_{p \in P} \min_{x \in S} d^q(p, x) \right)^{\frac{1}{q}} \quad (90)$$

其中参数 q 用于控制指标 Δ_p , q 越大则 Δ_p 对离群点的惩罚越大, d 计算的是欧式距离。

Van Veldhuizen 等人^[77]提出了综合性指标最大错误率(Maximum Pareto Front Error, ME), 可以同时比较解集的趋近程度和覆盖程度, 计算的是解 x 到 Pareto 近似前沿 P 中相距最近参考点 p 的距离, 并取其中的最大值作为指标值, ME 的定义如下:

$$\text{ME}(P, S) = \max_{p \in P} \sqrt{\min_{x \in S} \sum_{k=1}^m |f_k(x) - f_k(p)|^2} \quad (91)$$

Czyzszak 等人^[94]提出的 Dist2 与 ME 类似:

$$\text{Dist2}(P, S) = \max_{p \in P} \left(\min_{x \in S} \sum_{k=1}^m |f_k(x) - f_k(p)| \right) \quad (92)$$

故不妨定义 ME 的扩展形式:

$$\text{ME}(P, S, q) = \max_{p \in P} \left(\min_{x \in S} \sum_{k=1}^m |f_k(x) - f_k(p)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (93)$$

即有如下关系：

$$ME(P, S, 1) = \text{Dist2}(P, S) = \max_{p \in P} (d(P, S)) \quad (94)$$

IGD、IGD⁺、ObjIGD、IGD-NS、 Δ_p 、ME、DOA、Dist1、Dist2 这 9 个评价指标的值越小代表解集 S 的综合性越好，且它们均需要知道真实 Pareto 前沿信息，它们的计算复杂度均为 $O(m|S| \cdot |P|)$ 。

Li 等人^[97]提出了性能对比指标(Performance Comparison Indicator, PCI)，PCI 是一个无需知道真实 Pareto 前沿信息的 n 元指标，合并各 MOEAs 求得的解集并进行聚类，在每个簇中分别生成理想点作为参考点计算指标值。PCI 越小代表解集 S 的综合性越好，计算复杂度高。

超体积指标 HV^[33]衡量的是个体所支配的空间^[27]，也可称为指标 S^[33](Size of the Dominated Space, S)。通常情况下，参考点 z^{ref} 的设定与最低点 z^{nad} (定义 15) 有关，HV 的定义如下：

$$HV(S, z^{ref}) = \text{volume} \left(\bigcup_{i=1}^{|S|} c^i \right) \quad (95)$$

其中 c^i 是由某一非支配解 x 与参考点 z^{ref} 作为对角线构成的超立方体，其超体积 $\text{volume}(c^i)$ 为：

$$\text{volume}(c^i) = \begin{cases} \prod_{k=1}^m (z_k^{ref} - f_k(x^i)), \\ (\forall k (z_k^{ref} - f_k(x^i) > 0)) \\ 0, (\exists k (z_k^{ref} - f_k(x^i) \leq 0)) \end{cases} \quad (96)$$

公式 96 表明了劣于参考点 z^{ref} 的非支配解 x 均不参与 HV 运算。HV 的另一种表达为：

$$HV(S, z^{ref}) = \Lambda \left(\bigcup_{x^* \in PS} \{x | x^* > x > z^{ref}\} \right) \quad (97)$$

其中 Λ 指的是勒贝格(Lebesgue)测度^[98]。HV 的计算方式如图 12 所示，以 2 维的 MOPs 为例，阴影部分面积为超体积 HV 的值。

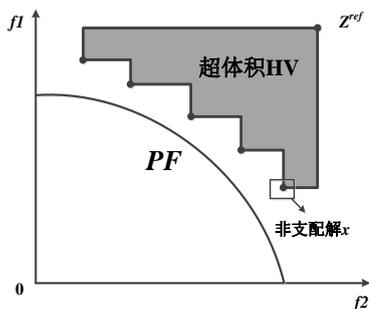


图 12 HV 的计算方式示意图

Fleischer^[99]证明了对于给定的目标空间和参考点，所有解均落在 Pareto 前沿上是 HV 取得最大值的充分条件，即求取最大的 HV 值与寻找最优的 Pareto 解集是等价的。文献[100-101]通过实验表明，当解集 S 均匀分布时 HV 的值较大，即 HV 能够衡量解集 S 的多样性。

HV 的不足之处在于受参考点影响较大^[102]，以及随着目标空间维度的增加，计算复杂度急剧增大。如图 13 所示，解集 S_1 和 S_2 在不同参考点 z^{ref} 下的 HV 值呈现了截然相反的情况。

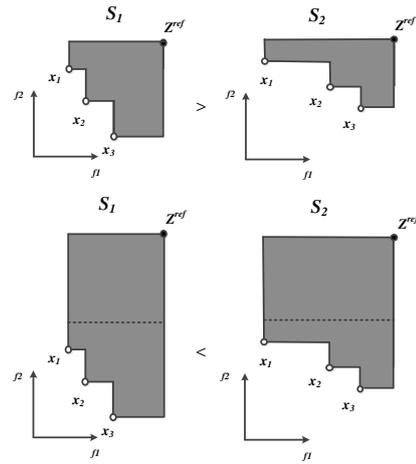


图 13 HV 的不足之处示意图^[102]

常见地用于加快 HV 计算速度的方法为蒙特卡罗法^{[12][103]}，其具体操作过程是在目标空间中均匀地采样大量的点，统计落在 HV 区域内的点数量，根据点数比例计算 HV 的数值。但蒙特卡罗法通过采样的方式牺牲了一定的精确度，快速计算精确的 HV 值的方法可以参考文献[104-105]。

Wu 等人^[69]提出了高维空间差异(Hyperarea Difference, HD)，实际上计算的为超体积差异(Hypervolume Difference, HVD)，定义如下：

$$HD(S, P, z^{ref}) = HV(z^0, z^{ref}) - HV(S, z^{ref}) \quad (98)$$

其中 $z^0 = (0, 0, \dots, 0)$ 为坐标轴原点。当计算 HD 时需对 MOPs 进行归一化操作，使得最低点 $z^{nad} = (1, 1, \dots, 1)$ ，参考点 $z^{ref} = z^{nad}$ 。即有：

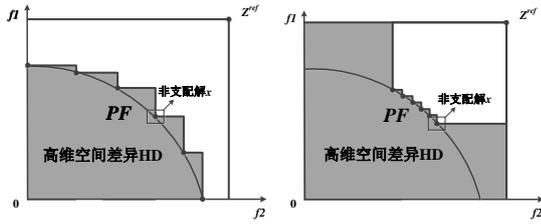
$$HD(S, P, z^{ref}) = HV(P, z^{ref}) - HV(S, z^{ref}) \quad (99)$$

由于在实际问题中存在真实 Pareto 前沿未知的情况，因此在归一化后可令 $HV(P, z^{ref}) = 1$ ，即：

$$HD(S, P, z^{ref}) = 1 - HV(S, z^{ref}) \quad (100)$$

以公式(100)的计算方式为例，图 14 表明了指标 HD 是综合性指标而非收敛性指标的原因，阴影部分面积为指标 HD 在 2 维 MOPs 上的值。HD 越小越好，图 14(a)中的解集多样性较好且 HD 较小，

图 14(b)中的解集多样性较差且 HD 较大, 故指标 HD 在衡量收敛性的同时可以衡量多样性。



(a)解集多样性好但 HD 较小 (b)解集多样性差但 HD 较大

图 14 指标 HD 为综合性指标而非收敛性指标说明

准确率^[69](Accuracy, AC)衡量的是解集 S 落在 Pareto 前沿上的程度, 定义如下:

$$AC(S, z^{ref}) = \frac{1}{1 - H(S) - HV(S, z^{ref})} \quad (101)$$

当计算 AC 时需对 MOPs 进行归一化操作, 使得最低点 $z^{nad} = (1, 1, \dots, 1)$, 参考点 $z^{ref} = z^{nad}$ 。

HV、AC 越大代表解集 S 的综合性越好, HD 越小代表解集 S 的综合性越好, HV、AC 的计算复杂度均为 $O(|S|^{m-1})$, HD 的计算复杂度为 $O(|P|^{m-1})$ 。

Hansen 等人^[67]提出了一系列的二元综合性指标, 基于概率的 R1 衡量的是解集 S_1 优于解集 S_2 的预期比例, 定义如下:

$$R1(S_1, S_2, U, p) = \int_{u \in U} C(S_1, S_2, u) p(u) du \quad (102)$$

$$C(S_1, S_2, u) = \begin{cases} 1, & u^*(S_1) > u^*(S_2) \\ 0.5, & u^*(S_1) = u^*(S_2) \\ 0, & u^*(S_1) < u^*(S_2) \end{cases} \quad (103)$$

其中 U 是聚合函数的集合, $u^*(S_1)$ 代表解集 S_1 的聚合函数最大值, 即 $u^*(S_1) = \max_{x \in S_1} \{u(x)\}$, $p(u)$ 是表示的是聚合函数 u 出现的概率。对于 Pareto 前沿为凸函数的 MOPs, 采用加权的切比雪夫(Weighted Tchebycheff)聚合方式, 如在 2 维的 MOPs 中有:

$$u_k = k f_1 + (1 - k) f_2 \quad (104)$$

指标 R2^[67] 衡量的是解集 S_1 优于解集 S_2 的预期程度, 定义如下:

$$R2(S_1, S_2, U, p) = \int_{u \in U} (u^*(S_1) - u^*(S_2)) p(u) du \quad (105)$$

指标 R3^[67] 衡量的是解集 S_1 较解集 S_2 的优势比例, 定义如下:

$$R3(S_1, S_2, U, p) = \int_{u \in U} \frac{u^*(S_1) - u^*(S_2)}{u^*(S_1)} p(u) du \quad (106)$$

类似地有指标 $R1_R$ 、 $R2_R$ 和 $R3_R$ ^[67], 用参考集 R

取代了另一个解集 S_2 , 为的是在比较多个解集时避免解集之间的非关联性^[67]。这 6 个 R 系列的指标越大代表解集 S 的综合性越好, $R1$ 、 $R2$ 和 $R3$ 的计算复杂度为 $O(m|S_1| \cdot |S_2|)$, $R1_R$ 、 $R2_R$ 和 $R3_R$ 的计算复杂度为 $O(m|S| \cdot |P|)$ 。

指标 P ^[106] 是应对 MaOPs 的综合性指标。在求解高维目标优化问题时, 若解 S 收敛性较差, IGD 与 HV 衡量解集 S 的多样性时存在较大偏差, 指标 P 解决了这个问题, 它通过方向向量将目标空间均匀地划分成若干子空间, 计算解 x 到与之相关联的方向向量的距离 r_i , 并取其倒数, 指标 P 的定义如下:

$$P(S) = \sum_{i=1}^M \frac{1}{r_i} \quad (107)$$

其中 M 为方向向量的数量, 选取距离的倒数进行计算是因为子空间内不存在解时, 可令 $\frac{1}{r_i} = 0$ 。关联方向向量和解的计算过程如下:

$$i = \max_{j=1:M} \frac{w_j^T F(x)}{\|w_j\| \|F(x)\|} \quad (108)$$

其中 w_j 为方向向量, $F(x)$ 为解 x 的目标向量, 解 x 关联第 i 个方向向量。指标 P 越大代表解集 S 的综合性越好, 其计算复杂度为 $O(m|S| \cdot |M|)$ 。

3.4.2 PMOEAs 专用的综合性指标

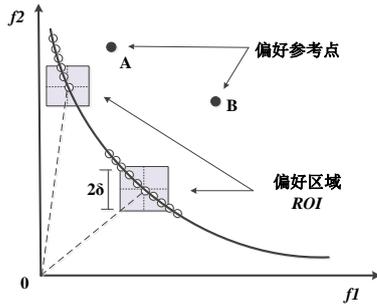
IGD 和 HV 作为常用的综合性指标在偏好多目标优化中均不适用, 因为在 PMOEAs 中不考虑解集 S 的延展性。只衡量分布性的多样性指标和收敛性指标在 PMOEAs 中仍然适用。

HV-UM^[40] 通过计算偏好区域内的 HV 来衡量解集的性能, 具体计算步骤如下: 1) 计算解集 S 中与坐标轴原点最近的解 x^0 , 设为中心点; 2) 决策者设定偏好区域半径 δ , 构建偏好区域内的超立方体; 3) 计算所构建的超立方体的超体积值。HV-UM 的定义如下:

$$HV - UM(S) = HV(S, x^{\delta+}) \quad (109)$$

其中 $x_i^{\delta+} = x_i^0 + \delta, i \in \{1, \dots, m\}$ 。

HV-UM 的优势在于它通过人为定义的参数 δ 控制偏好区域的范围, 避免了 HV 指标在偏好多目标中的缺陷。它的不足之处在于它把中心点设置为距离坐标轴原点最近的解, 此时对于偏好参考点 r^* 来说所选取的偏好范围并不准确, 如图 15 所示, 偏好参考点 A 所选取的偏好区域有误。HV-UM 越大代表解集 S 在偏好区域内的综合性越好, 其计算复杂度为 $O(|S|^{m-1})$ 。

图 15 HV-UM 的不足之处示意图^[41]

IGD-CF^[41]是一个无需知道真实 Pareto 前沿信息的 n 元指标，通过合成 Pareto 前沿衡量解集的性能，具体计算步骤如下：1) 合并各 MOEAs 求得的解集，将所有非支配解作为真实 Pareto 前沿中最优解的替代解；2) 由决策者决定偏好区域的半径 δ 并生成偏好区域；3) 通过合成的 Pareto 前沿计算偏好区域内的 IGD 指标。IGD-CF 的定义如下：

$$\text{IGD-CF}(S_1, S_2, \dots, S_n, r^*) = \text{IGD}_{ROI}(\{S_2, \dots, S_n\}, S_1) \quad (110)$$

其中 r^* 为偏好参考点，偏好区域ROI的范围为：

$$ROI = \{x | x^{\delta-} \geq x \geq x^{\delta+}\} \quad (111)$$

其中 $x_i^{\delta-} = x_i^c - \delta$, $x_i^{\delta+} = x_i^c + \delta$, $i \in \{1, \dots, m\}$ 。 x^c 为距离偏好参考点 r^* 最近的解。

IGD-CF 较 HV-UM 的优势在于它可以通过合成前沿指定距离偏好参考点最近的解 x^c 作为中心点，避免了如图 15 所示的情况。但 IGD-CF 仍然需要人为指定偏好区域，且其数值受合成前沿的影响较大。IGD-CF 越大代表解集 S 在偏好区域内的综合性越好，其计算复杂度为 $O(m \prod_{i=1}^n |S_i|)$ 。

PMDA^[42]是基于偏好距离和偏好角度的综合性评价指标，具体计算步骤如下：1) 将偏好参考点 r^* 的信息分解为一组连接坐标轴原点与参考点的射线；2) 构建偏好超平面及其映射解集；3) 计算偏好角度和偏好距离，并计算指标数值。PMDA 越小代表解集 S 在偏好区域内的综合性越好，其计算复杂度为 $O(m|S|)$ 。

PMDA 的优势在于它不需要人为指定偏好区域的大小，它的劣势在于依然考虑了解集 S 的延展性，但在 PMOEAs 中考虑了延展性，因此会对解集 S 在偏好区域内的多样性给出错误的评价。

3.4.3 DMOEAs 专用的综合性指标

DMOEAs 专用的综合性指标在 MOEAs 通用的综合性指标中引入了基于代数的离散时间变量 t ，计算在 Pareto 前沿环境变化前的平均值。

平均反世代距离 MIGD^[43]的定义如下：

$$\text{MIGD}(P_t, S_t) = \frac{1}{|T|} \sum_{t \in T} \text{IGD}(P_t, S_t) \quad (112)$$

其中 T 包含上一次 Pareto 前沿变化前后到下一次变化前的所有代数 t ，即一个环境中的所有代数 t ，下同。MIGD 越小代表解集 S 的综合性越好，其计算复杂度为 $O(m|S| \cdot |P|)$ 。

平均超体积 MHV^[44]的定义如下：

$$\text{MHV}(S_t, z^{ref}) = \frac{1}{|T|} \sum_{t \in T} \text{HV}(S_t, z^{ref}) \quad (113)$$

平均超体积差异 MHVD^[45]的定义如下：

$$\text{MHVD}(S_t, P_t, z^{ref}) = \frac{1}{|T|} \sum_{t \in T} \text{HD}(S_t, P_t, z^{ref}) \quad (114)$$

实际上，所有的静态评价指标通过引入时间变量 t ，均可转化为 DMOEAs 的专用指标，如 GD、SP、 Δ_p 等等；反之，DMOEAs 的专用指标也可用于衡量静态 MOEAs 的求解速度，但并不能准确地衡量所求解集 S 的质量。如 MIGD 用于静态优化时只有一个环境，即 $T = 1$ ，此时 MIGD 的值为 IGD 在优化过程中的平均值，因此越快地优化 MOPs 能够得到更小的 MIGD。所以本文认为动态指标也可用于大规模优化^[107]的衡量上，以更好地反映解集 S 在优化过程中和优化趋于稳定后的综合质量。

值得注意的是，在动态优化中存在指标超体积比率^[108] (Hypervolume Ratio, HVR)，与高维空间比率 HR 不同，HVR 在静态优化中不存在明显意义，因为静态 MOPs 的 Pareto 前沿保持不变，且 HVR 需要计算 $\text{HV}(P, z^{ref})$ ，计算开销远大于 $\text{HV}(S, z^{ref})$ 。但在动态优化中，DMOPs 中的 Pareto 前沿在凹、凸函数之间反复变化，而 HV 受 Pareto 前沿形状的影响较大，Pareto 前沿为凸函数时容易得到较大的 HV，为凹函数时容易得到较小的 HV，此时使用 MHV 或 MHVD 容易引起错误计算，HVR 可以有效地解决这个问题，其定义如下：

$$\text{HVR}(S_t, P_t, z^{ref}) = \frac{1}{|T|} \sum_{t \in T} \frac{\text{HV}(S_t, z^{ref})}{\text{HV}(P_t, z^{ref})} \quad (115)$$

MHV、HVR 越大代表解集 S 的综合性越好，MHVD 越小代表解集 S 的综合性越好，MHV、MHVD 的计算复杂度均为 $O(m|S|^{m-1})$ 。HVR 的计算复杂度为 $O(m(|S| + |P|)^{m-1}) = O(m|P|^{m-1})$ 。

在动态优化中，除了关于解集的评价指标，还有关于评价指标的评价指标。

定义 17(评价指标的数值)。评价指标在特定

MOEA 完成求解一次 MOPs 后, 计算出来的数值称为评价指标的数值, 简称指标值, 记为 I 。

Jiang 等人^[109]提出了关于指标值 I 的鲁棒性指标(Robustness, R), 计算的是不同环境下指标值的标准差, 定义如下:

$$R(I, t) = \sqrt{\frac{1}{T-1} \sum_{t \in T} (I - \bar{I})^2} \quad (116)$$

指标 R 越小代表评价指标值 I 的鲁棒性越好, 计算复杂度取决于待评估的评价指标。

3.4.4 MMOEAs 专用的综合性指标

决策空间中有专用的收敛性指标 M_1 、分布性指标 M_2 和延展性指标 M_3 ^[27], 分别与目标空间中的指标 M_1^* 、 M_2^* 和 M_3^* 对应。

决策空间内的综合性指标 IGDX^[46] 定义如下:

$$IGDX(R, S) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{|R|} d_i^2}}{|R|} \quad (117)$$

其中 R 为决策空间中的参考集, d_i 计算的是参考集 R 的参考点 p 与最近的解 x^i 之间的欧式距离。

表 1 评价指标分类表

指标类型	评价指标	参考集	比较函数	计算复杂度	
计数指标	OVNG[22], GVNG[22], NVA[22]	无	>	低	
	ONVGR[22], GNVGR[22]	Pareto 近似前沿 P	>	低	
	ER[23]	Pareto 近似前沿 P	<	低	
	$C1_R$ [67], $C2_R$ [67]	参考集 R	>	$O(m S_1 \cdot R)$	
	C [24]	另一个解集 S	>	$O(m S_1 \cdot S_2)$	
	NR[68]	其他解集 S_i	>	$O(m \prod_{i=1}^n S_i)$	
	NDC_μ [69]	无	>	$O(\mu^m S)$	
收敛性指标	CL_μ [69]	无	<	$O(\mu^m S)$	
	GD[25], GD^+ [76], γ [26], M_1^* [27]	Pareto 近似前沿 P	<	$O(m S \cdot P)$	
	RP[25]	Pareto 近似前沿 P	>	$O(m S \cdot P)$	
	SPAD[28]	参考集 R	<	$O(m S)$	
	I_e [50], I_{e+} [50]	另一个解集 S	<	$O(m S_1 \cdot S_2)$	
	H[24]	无	<	$O(S ^{m-1})$	
	D[27]	另一个解集 S	<	$O((S_1 + S_2)^{m-1})$	
多样性指标	HR[77]	Pareto 近似前沿 P	<	$O(P ^{m-1})$	
	分布性	Δ' [26], SP[28], χ^2 [80], UD[55]	无	<	$O(m S ^2)$
		M_2^* [27]	无	>	$O(m S ^2)$
	延展性	MS[48], OS[69]	无	>	$O(m S)$
		M_3^* [27]	无	>	$O(m S ^2)$
	综合性指标	SI[81]	参考集 R	>	$O(S ^{m-1})$
		分布 & 延展	Δ [4], Δ' [29]	Pareto 近似前沿 P	<
Δ_{line} [82]			无	<	$O(m S ^2)$
PMOEAs 专用		DIR[83]	无	<	$O(m S \cdot M)$
		PD[79]	无	>	$O(m S ^2)$
		HV_q [85]	参考集 R	>	$O(S ^{m-1})$
		CPF[86]	Pareto 近似前沿 P	>	$O(m P ^2)$
	DCI[87], M-DI[88]	其他解集 S_i , 共 L 个解集	>	$O(mL^2 S ^2)$	
DMOEAs 专用	\bar{D} [57], E[89], CE[90], D_σ [91], D'_σ [92]	无	>	高	
	通用	IGD[30], IGD^+ [76], ObjIGD[82], IGD-NS[96], Dist1[94], Dist2[94], Δ_p [31], ME[77], DOA[95]	Pareto 近似前沿 P	<	$O(m S \cdot P)$
		PCI[97]	其他解集 S_i	<	高
		HV[33], S[33], AC[69]	参考点 z^{ref}	>	$O(S ^{m-1})$
	HD[69]	Pareto 近似前沿 P , 参考点 z^{ref}	<	$O(P ^{m-1})$	
	$R1$ [67], $R2$ [67], $R3$ [67]	另一个解集 S	>	$O(m S_1 \cdot S_2)$	
	$R1_R$ [67], $R2_R$ [67], $R3_R$ [67]	参考集 R	>	$O(m S \cdot R)$	
	P[106]	无	>	$O(m S \cdot M)$	
	MMOEAs 专用	HV-UM[40]	无	>	$O(S ^{m-1})$
		IGD-CF[41]	偏好参考点 r^* , 其他解集 S_i	<	$O(m \prod_{i=1}^n S_i)$
PMDA[42]		偏好参考点 r^*	<	$O(m S)$	
MMOEAs 专用	MIGD[43]	Pareto 近似前沿 P	<	$O(m S \cdot P)$	
	MHV[44], MHVD[45]	参考点 z^{ref}	>	$O(S ^{m-1})$	
	HVR[108]	Pareto 近似前沿 P , 参考点 z^{ref}	>	$O(P ^{m-1})$	
MMOEAs 专用	R[109]	无	<	取决于待评估指标	
	IGDX[46]	决策空间参考集 R	<	$O(m S \cdot R)$	
MMOEAs 专用	PSP[47]	Pareto 近似前沿 P	>	$O(m S \cdot R)$	

Pareto 集合逼近 PSP^[47]衡量决策空间内 Pareto 最优解集PS和解集S之间的相似性, 定义如下:

$$PSP(R, S) = \frac{CR(S)}{IGDX(R, S)} \quad (118)$$

其中覆盖率CR的定义如下:

$$CR(S) = \left(\prod_{i=1}^k \delta_k \right)^{\frac{1}{2n}} \quad (119)$$

当 $r_k^{max} = r_k^{min}$ 时, $\delta_k = 1$ 。

当 $x_k^{min} \geq r_k^{max} \parallel x_k^{max} \leq r_k^{min}$ 时, $\delta_k = 0$ 。

其他情况下, δ_k 的定义如下:

$$\delta_k = \left(\frac{\min(x_k^{max}, r_k^{max}) - \max(x_k^{min}, r_k^{min})}{r_k^{max} - r_k^{min}} \right)^2 \quad (120)$$

其中 r_k^{max}, r_k^{min} 是决策空间中的参考点r在第k个目标上的最大值与最小值, x_k^{max}, x_k^{min} 是解集S在第k个目标上的最大值与最小值。

IGDX 越小代表解集S在决策空间中的质量越好, PSP 越大代表解集S在决策空间的质量越好, 它们的计算复杂度均为 $O(m|S| \cdot |R|)$ 。在展开分析之前, 必须明确评价指标并不存在绝对的公平, 因为无法用一个数值来包括N个解 (或同时包括参考集) 的全部信息^[31], 在这个前提下对于评价指标的分析才更有意义。

定义 18(比较函数). 若评价指标的指标值I越小越好, 则比较函数记为<;若评价指标的指标值I越大越好, 则比较函数记为>。

由于 MOEAs 具有一定的随机性, 一次求解过程中所得的指标值I不具有可比性, 一般是重复独立的实验求解若干次后, 通过计算数指标值的平均值 \bar{I} 和方差 $Var(I)$ 进行 MOEAs 的性能比较。

辅助指标值计算的参考向量、网格等不在参考集的范围之内。代数变量t、小生境半径 σ 等参数也不在参考集的范围之内。表 1 对上述四类评价指标进行了总结与归纳。计算复杂度中的|M|为参考向量的数目。

4 指标分析

对评价指标进行数学分析能够帮助判断一个策略的提出是否真的提升了 MOEAs 的求解性能, 如当 3 维空间中的 Pareto 前沿为凹曲面时, 通过修改权重向量分布的方式以获得更大的 HV 值, 并不意味着解集的多样性得到了提升, 而是更加迎合了

HV 的计算方式^[18]。

此外, 使用不同的评价指标得出了不一致的结论时, 更需要对评价指标进行深入分析。假设存在一个 MOPs, 两种算法分别求得解集 S_1 和 S_2 , 使得 $IGD(S_1) < IGD(S_2)$ 的同时存在 $HV(S_1) < HV(S_2)$, 此时仅使用一种评价指标对比算法优劣是不够严谨的, 但这并不意味着两种算法无法比较。

本节从高维目标适应性、离群点敏感性、参考集合理性、指标值最优性四个方面对部分具有代表性的评价指标进行分析与比较。

4.1 高维目标适应性

高维的目标空间中解集会变得非常稀疏^[110], 有限的解集难以覆盖整个 Pareto 前沿^[79]。本文划分高维适应性指标的标准是: 若一个评价指标只适用于某些维度的目标空间, 则称为非适应性指标; 若一个评价指标适用于任何维度的目标空间, 但在高维目标空间上的表现偏差较大, 则称为弱适应性指标; 若一个评价指标在高维目标空间上仍有较好的表现, 则称为强适应性指标。如表 2 所示。

表 2 评价指标高维目标适应性表

	强适应性指标	弱适应性指标	非适应性指标
计数指标	无	全部计数指标	无
收敛性指标	GD, ME	$I_{\epsilon}, I_{\epsilon+}$	SPAD
分布性指标	PD	SP, Δ^*	Δ', Δ
综合性指标	IGD, Δ_p	HV	无

SPAD 是非适应性指标是因为参考点数量太少; Δ', Δ 则是因为计算了连续解之间的距离, 而在高维目标空间之中难以定义两个解之间的连续关系。计数指标是弱适应性指标是因为随着目标维度的增加, 非支配解的比例将大幅增加, 但这并不代表解集的质量也因此提升; $\gamma, M_1^*, SP, \Delta^*$ 是弱适应性指标是因为欧式距离在高维的空间中存在维数灾难^[111], 即解之间的距离趋向于相等。GD、ME、IGD、 Δ_p 均存在参数可以控制距离的类型, 故为强适应性指标; HV 是弱适应性指标是因为在高维空间中, 仅有极少部分非支配解参与指标值的运算, 难以如实地反映整个解集的优劣。

随着目标维度的增加, 评价指标的计算代价会随之提高, 但除了 HV 系列指标等部分指标外, 其他指标无需过多考虑计算代价, 因为这些评价指标与算法的计算复杂度均随着目标维度线性增长, 如 IGD 的计算复杂度为 $O(m|S| \cdot |P|)$, NSGA-2 的计算复杂度为 $O(m|S|^2)$ 。

此外, HV 在 MaOPs 上计算方差时会出现一定的误导性, HV 的方差存在随着目标维度的增加先

增大后减小的可能,因为解集的收敛性随着目标维度的增加而变差,导致 HV 的值急剧缩小,因此 HV 的方差也随之变小,但这实际上并不代表所求得解集更加稳定。在 WFG 系列测试问题^[112]上不存在这种情形,因为随着目标维度的增加其 Pareto 边界点距离原点的距离也在增加,其他 Pareto 边界点与原点的距离随着目标维度发生变动的可扩展系列测试问题也不存在这种情形。

因此在应对 MaOPs 时,尤其是维数较高的 MaOPs,建议使用 IGD、GD 等强适应性指标。在高维的目标空间中综合性指标会更侧重解集的收敛性,因为当一个解集收敛性较差时其多样性对指标值的影响甚微^[106]。又因为维数灾难的存在,传统的多样性指标也难以在高维的目标空间中准确地衡量多样性,所以如何在高维目标空间中更好地衡量解集的多样性是评价指标的一个挑战。

4.2 离群点敏感性

MOPs 的离群点尚未有精确的定义,一般认为距离真实 Pareto 前沿较远的点都可以算作离群点^[28]。本文给出关于离群点的相关定义如下:

定义 19(离群点). 解集 S 中的解 x 在某个目标上的值较大,则称该解为离群点(Outliers),记为 x^o 。

$$f_i(x^o) > M, \exists i \in \{1, \dots, m\} \quad (121)$$

其中 M 是一个人为给定的大正数。

定义 20(离群点敏感性). 向解集 S 中加入一个离群点 x^o ,若评价指标的数值 I 与 M 存在关系

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} I(S) = +\infty \quad (\text{该评价指标的数值 } I \text{ 越小则表明}$$

MOEAs 性能越好,反之则极限为 0),则称该评价指标具有离群点敏感性,简称敏感性。

其中离群点 x^o 为人为定义的特殊离群点,并非算法实际求解获得的离群点 x^o ,即存在 M 使得 $x^o \notin \Omega, f_i(x^o) \notin \mathbb{R}^m$ 的情况。引入特殊离群点 x^o 是为了说明评价指标的离群点敏感性,因此去寻找 x^o 对应的决策空间是没有意义的。

通俗地理解评价指标的敏感性即为指标值 I 受离群点 x^o 的影响程度。根据评价指标对离群点的敏感性对部分评价指标进行划分,如表 3 所示。

表 3 评价指标离群点敏感性表

	非敏感性指标	敏感性指标
计数指标	全部计数指标	无
收敛性指标	SPAD	GD, I_{ϵ^+} , ME
分布性指标	无	SP, Δ^* , Δ , Δ^* , PD
综合性指标	IGD, HV	Δ_p

计数指标均为非敏感性指标,因为计数指标的

计算方式与解 x 在目标空间对应的 $F(x)$ 无关。HV 为非敏感性指标,因为离群点 x^o 在各个目标上都大于最低点 z^{nad} ,故离群点 x^o 不参与 HV 的计算。IGD 为非敏感性指标,因为 Pareto 近似前沿中存在参考点 p 与解 x 的距离小于参考点 p 与离群点 x^o 的距离,故离群点 x^o 也不参与 IGD 的计算。收敛性指标中除了 SPAD 均为敏感性指标,这是因为 SPAD 的计算方式与 IGD 相似,故 SPAD 也为非敏感性指标。

性质 8. 若一个非计数指标是敏感性指标,则解集 S 中的所有解都参与指标运算。

通常情况下,若一个评价指标不具有敏感性,则该评价指标具有更好的稳定性(评价指标的稳定性并非 MOEAs 的鲁棒性),但这并不意味着一个评价指标具有敏感性就是不好的,比如对于 WFG 系列问题^[112]容易出现解集 S 中大部分解收敛性较好,而部分边界点 x^{ext} 收敛性极差的情况,此时使用敏感性指标更容易区分出解集的优劣,以反映 MOEAs 的性能差异。

对于 IGD(P, S, q),其离群点敏感性可以通过改变距离类型控制,即设定不同的 q 值, q 越大离群点敏感性越高,反之越低。当 $q \rightarrow \infty$ 时,IGD 的值仅取决于离群点。GD 等其他可以通过参数控制距离类型的评价指标也有类似结论。

对于一个给定的 MOPs,是否选择敏感性指标对比 MOEAs 的性能优劣应从两个方面考虑:1) MOEAs 求解完成后是否需要关注离群点,对于某些实际问题决策者并不关心离群点,此时建议使用非敏感性指标避免离群点的影响;2)求解 MOPs 时是否容易出现离群点,针对本身难以优化或部分边界点难以收敛的 MOPs,建议使用敏感性指标加大 MOEAs 的区分度。

4.3 参考集合理性

参考集合理性分析评价指标的参考集取值范围,主要讨论 HV、IGD 和 GD。

对于 Pareto 前沿为 $f_1 + f_2 = 1$ 的测试函数,显然我们希望所得解集 S 中包含 Pareto 边界点集 $PBS = \{(1, 0), (0, 1)\}$,即有最优解集 S^* 为:

$$S^* = \left\{ x \mid x = \left(\frac{i-1}{N-1}, \frac{N-i}{N-1} \right), i \in \{1, \dots, N\} \right\} \quad (122)$$

将 HV 的参考点 z^{ref} 设为 z^{nad} 的最大问题在于无法衡量解集 S 中边界点 x^{ext} 的 HV 值,即有 $HV(x^{ext}, z^{nad}) = 0$,故 HV 的最优解集 S_{HV}^* 为:

$$S_{HV}^* = \left\{ x \mid x = \left(\frac{i}{N}, \frac{N-i}{N} \right), i \in \{1, \dots, N\} \right\} \quad (123)$$

显然 S_{HV}^* 中不包含 PBS 。故需要设置 HV 的参考点 z^{ref} 略劣于 z^{nad} 。则令：

$$z_i^{ref} = \delta z_i^{nad}, \delta \in (1, +\infty) \quad (124)$$

有 $\lim_{\delta \rightarrow +\infty} Var(HV(S, z^{ref})) = 0$ ，即当 δ 较大时 HV 的方差为零，故建议 $\delta \leq 10$ 。

解集 S 中的解 x 所支配且不被其他解支配的空间大小为 $S_x = \left(\frac{1}{N-1}\right)^2$ ，显然我们希望被边界点 x^{ext} 支配且仅被 x^{ext} 支配的空间大小至少也为 S_x ，故建议 $\delta \geq 1 + \frac{1}{N-1}$ 。若难以求解一个 MOPs 的 Pareto 最优解，建议增大 δ ，反之建议减小 δ 。

对于 IGD，为了保证计算的准确性，Pareto 近似前沿 P 中参考点数量不能太少。由于在维度大于等于2的空间中至少需要两个点才能够确定一个点，使这个点到那两个点欧氏距离的平方和最小，故在计算每一个非边界点的 IGD 值时至少需要两个参考点，计算每个 x^{ext} 只需要一个参考点。因此得到 $|P|$ 的下限 $2N - m$ 。MOEAs 实际运行时，IGD 的参考点数量越多越好，但不能影响 MOEAs 的运行时间，故认为 $|P|$ 的上限以 N^m 为宜。

对于 GD，与 IGD 的不同之处在于当 MOPs 的目标数量增大时， $|P|$ 的下限不能太小，这是因为当解 x 落在两个参考点之间与正好落在参考点上时，对 IGD 数值的影响不大，对 GD 影响较大。故建议 $|P|$ 的下限为 $2^m N$ ，因为参考点的数量与目标维度的幂次方有关，上限同为 N^m 。

给出参考集的建议表如表 4 所示。

表 4 参考集的建议表

指标	建议选取的参考集范围
HV	$z_i^{ref} = \delta z_i^{nad}, \delta \in \left[1 + \frac{1}{N-1}, 10\right]$
IGD	$ P \in [2N - m, N^m]$
GD	$ P \in [2^m N, N^m]$

通过对参考集合理性的分析可以发现，在设置 HV 的参考点时，为了确保边界点 x^{ext} 的 HV 值不为 0，建议 $\delta \geq 1 + \frac{1}{N-1}$ 如在 PlatEMO^[93]中设置了 $\delta = 1.1$ ；设置 GD、IGD 的参考集时，在不影响 MOEAs 运行时间的前提下，设置更多的参考点能得到更精确的结果。

4.4 指标值最优性

本节讨论的是关于部分评价指标数值的一些数学定理，以及 Pareto 最优解集 PS 与有穷的解集 S

在计算指标值 I 时所能达到最优值。通过对指标值最优性的分析，能够对指标数值上的极限有更深入的认识，增强对指标数值的分析能力。

定义 21(指标值最优解集). 当一个解集 S 使得某个评价指标在给定 MOPs 上取到最优值 I^* ，称该解集为指标值最优解集，简称最优解集，记为 S^* 。

对于两个不同的指标，其指标值最优解集不一定相同，比如在凹曲面上存在 $S_{IGD}^* \neq S_{HV}^*$ ，但在直线或平面上存在 $S_{IGD}^* = S_{HV}^*$ 。

定理 4. $C(S_1, S_2)$ 和 $C(S_2, S_1)$ 存在如下关系：

$$C(S_1, S_2) + C(S_2, S_1) \geq 1 \quad (125)$$

证明. 假设解之间存在一种关系定义为：

$$C_x(x^1, x^2) = \begin{cases} 0, & x^2 > x^1 \\ 1, & x^1 \geq x^2 \end{cases} \quad (126)$$

其中 $x^1 \in S_1, x^2 \in S_2$ 即证明：

$$C_x(x^1, x^2) + C_x(x^2, x^1) \geq 1 \quad (127)$$

当 $C_x(x^1, x^2) = 0$ 时，存在关系 $x^2 > x^1$ ，则有 $C_x(x^2, x^1) = 1$ 。当 $C_x(x^1, x^2) = 1$ 时，若 $x^1 > x^2$ ，则 $C_x(x^2, x^1) = 0$ ；若 $x^1 \geq x^2$ ，则 $F(x^1) = F(x^2)$ ，则 $x^2 \geq x^1$ ，此时 $C_x(x^2, x^1) = 1$ ，不等式(127)得证，故定理 4 得证。证毕。

定理 5. NR 和非支配解集 NS_i 存在如下关系：

$$NR(S_1, S_2, \dots, S_n) \leq \frac{|NS_i|}{|B|}$$

$$B = \{b | (\forall b) \exists x \in (S_1 \cup S_2 \dots \cup S_n) > b\} \quad (128)$$

其中 NR 评估的是解集 S_i 。

证明. 即证：

$$|B \cap S_i| \leq |NS_i| \quad (129)$$

显然解集 S_i 中受支配解的解 $x \notin NS_i \wedge x \notin B$ 。假设存在非支配解 $x^1 \in S_i$ ，其他的解集中存在非支配解 x^2 。若 $x^1 \geq x^2$ 或 x^1 与 x^2 互不支配，则 $x^1 \in B$ ，若 $x^2 > x^1$ ，则 $x^1 \notin B$ 。故有：

$$(\forall x \in S_i)(x \in (B \cap S_i) \rightarrow x \in NS_i) \quad (130)$$

因此 $|B \cap S_i| \leq |NS_i|$ ，得证。证毕。

定理 6. 对于同一个解集 S ， γ 始终不小于 GD。关于定理 6 的证明过程请参考附录。

关于定理 6 一般形式的推广：

定理 7. 对于同一个解集 S ， $GD(S, P, j) \geq GD(S, P, k)$ ，其中 $j < k$ 。

关于定理 7 的证明过程请参考附录。对于 IGD 也有类似的定理，证明过程同定理 7。

定理 8. 对于同一个解集 S ， $IGD(P, S, j) \geq IGD(P, S, k)$ ，其中 $j < k$ 。

性质 9. 若在 k 维的目标空间中 Pareto 前沿与

HV 的参考点在某一目标上的值始终相等, 则当解集 S 中的所有解均落在 Pareto 前沿上时, $HV = 0$ 。

定理 9. 当 Pareto 前沿非离散时, 指标值最优解集 S_{HV}^* 求得的 HV 值始终小于 Pareto 最优解集 PS 求得的 HV 值。

$$HV(S_{HV}^*, z^{ref}) < HV(PS, z^{ref}) \quad (131)$$

证明. 由文献[99]中的结论可推得: 解集 S_{HV}^* 中所有解均落在 Pareto 前沿上, 即 $x \in S_{HV}^* \subseteq PS$, 故 $HV(S_{HV}^*, z^{ref}) \leq HV(PS, z^{ref})$, 又因为 Pareto 最优解 x^* 与解集 S 中的解 x 存在关系:

$$(\exists x^*)(\forall x)(f_i(x^*) < f_i(x)) \quad (132)$$

其中 $i \in \{1, \dots, m\}$, 即存在 Pareto 最优解 x^* 对于任何解 x , x^* 在某个目标上的值小于 x , 则 Pareto 最优解 x^* 与参考点 z^{ref} 构成的超立方体 c_1 与解 x 与参考点 z^{ref} 构成的超立方体 c_2 存在关系 $c_1 \cap c_2 \neq \emptyset$, 故不等式无法取到等号。证毕。

定理 9 的另一个含义为通过 Pareto 最优解集 PS 计算出来的 HV 值为理论最大值, 且严格小于意味着该理论值无法通过实际求解 MOEAs 而得。

而对于 IGD 则不存在类似的定理, 这与 Pareto 近似前沿 P 的参考点数量有关, 当 Pareto 近似前沿 P 的参考点数量等于解集 S 的大小 N 时, 显然存在 $IGD(P, S_{IGD}^*) = 0$, 即解集 S_{IGD}^* 中的解 x 均与 Pareto 近似前沿 P 上的参考点重合, 而此时 $IGD(P, PS) > 0$, 因为此时必然存在 Pareto 最优解 $x^* \notin P$ 使得 $IGD(P, x^*) > 0$, 所以 Pareto 最优解集 PS 求得的 IGD 值未必小于解集 S_{IGD}^* 所求得的值。

在实验过程中难免出现一些较为特殊的指标值, 如出现 $HV = 0$ 的主要原因是所求解集 S 的收敛性太差, 导致非支配解均劣于参考点 z^{ref} ; 出现 IGD 的值随着代数多次断崖式下跌, 是因为算法陆续优化了个别对 IGD 值影响较大的离群点。分析这些数值对 MOEAs 的性能比较是很有意义的。

5 结语

本文首先介绍了 MOEAs 评价指标的研究现状, 然后介绍了多目标优化的相关概念, 综述了现有的评价指标, 并根据计数、收敛性、多样性、综合性这四种类型划分评价指标, 探讨了它们的优势与不足; 并选取了一些具有代表性的指标, 分析了目标维度、离群点、参考集、指标值四个方面对这些评价指标的影响, 给出了一些关于评价指标的定理。关于评价指标还有很多方面有待进一步研究。

(1) 无需先验信息的综合性指标。通用的综合性指标大多需要设置参考集, 即便是 HV 也需要知道 Pareto 前沿在每个目标上的最大值以设置 z^{ref} , 即需要知道真实 Pareto 前沿中边界点 x^{ext*} 的先验信息。但在部分实际问题中, 真实 Pareto 前沿的信息是未知的, 因此有必要展开相关的研究。

(2) 新型多元评价指标的研究。现有的指标大多都是一元指标或二元指标^[50], 典型的一元指标如 IGD、HV, 典型的二元指标如 C、R2。但随着多因子优化^[113](Multifactorial Optimization, MFO)——也称多任务优化^[114](Multitask Optimization, MTO)——的提出, 新型二元及多元评价指标, 如衡量任务间相关性^[115]的评价指标, 亟待进一步地研究。

(3) 高维目标评价指标的研究。尽管现有的不少评价指标能在 MaOPs 中使用, 但是随着目标维数的增加问题会变得复杂^[75], 当解集的收敛性较差时, 综合性指标难以准确地衡量多样性也是一个待解决的问题^[106], 现阶段针对 MaOPs 评价指标的研究成果仍然较少, 如 PD、P, 有待进一步研究。

(4) 大规模优化评价指标的研究。在大规模优化中可以通过使用传统指标并统计时间开销的方式衡量算法性能的优劣^[116], 也存在基于评价指标的大规模多目标进化算法^[117]。现阶段关于大规模优化的评价指标仍然侧重解集质量, 关于决策变量分组精确度以及算法优化速率的评价指标均存在一定的研究空间。

(5) 鲁棒性评价指标的研究。现有的许多评价指标主要针对 MOEAs 所求得的解集质量, 鲜有评价方式能够衡量 MOEAs 的鲁棒性, 评价指标的方差只能反映 MOEAs 在求解某个 MOPs 时的鲁棒性, 并不能反映 MOEAs 在不同 MOPs 之间的鲁棒性, 也不能反映 MOEAs 对于参数设置的敏感性, 因此迫切需要对 MOEAs 的鲁棒性进行数学建模。

(6) PMOEAs 评价指标的研究。缺乏能将决策者偏好信息纳入考虑且无需人为指定偏好区域的综合性评价指标, HV-UM 与 IGD-CF 通过简单地划分偏好区域, 能够衡量偏好区域内解集的质量, 但并不能衡量解集与决策者偏好之间的关系^[37], 如何通过评价指标衡量这两者之间的关系是亟待研究的问题。

(7) DMOEAs 评价指标的研究。DMOEAs 的评价指标都是基于代数的伪动态评价指标, 在基准测试集 FDA^[35]、DMOP^[118]、F^[119]等系列测试函数上表现稳定, 但是这些测试函数的动态模式大多都

是有规律的、可预测的,而实际的动态问题更为复杂,因此动态评价指标仍然有些路要走。

(8) MMOEAs 评价指标的研究。由于目前 MMOEAs 多应用于低维目标的 MOPs^[120],其在目标空间中解集的表现较好,因此多衡量决策空间中解集质量,缺乏能够同时衡量解集 S 在决策空间和目标空间中综合性的指标。如何结合现有的综合性指标和 MMOEAs 的专用指标,是需要考虑的问题。

(9) 关于评价指标的数学性质研究。针对评价指标的数学性质以及相关定理推导的显著性研究成果主要集中在 HV 及其系列指标上,其他的评价指标相关研究成果目前仍然较少。现阶段研究评价指标的性质主要通过运行 MOEAs 并对指标数值进行对比分析,但 MOEAs 存在一定的随机性,并不能严格证明评价指标存在某些特性,因此需要进一步展开评价指标在数学方面的相关研究。

参考文献

- [1] Zhang J, Xing L. A survey of multiobjective evolutionary algorithms//Proceedings of the 2017 IEEE International Conference on Computational Science and Engineering (CSE) and IEEE International Conference on Embedded and Ubiquitous Computing (EUC). Guangzhou, China, 2017: 93-100.
- [2] Ma H, Shen S, Yu M, et al. Multi-population techniques in nature inspired optimization algorithms: A comprehensive survey. *Swarm and evolutionary computation*, 2019, 44: 365-387.
- [3] Falcón-Cardona J G, Coello C A C. Indicator-based multi-objective evolutionary algorithms: A Comprehensive survey. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 2020, 53(2): 1-35.
- [4] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, 6(2): 182-197.
- [5] Zitzler E, Laumanns M, Thiele L. SPEA2: Improving the strength Pareto evolutionary algorithm. Zürich, Switzerland: Swiss Federal Institute of Technology (ETH), TIK-report: 103, 2001.
- [6] Come D W, Jerram N R, Knowles J D, et al. PESA-II: Region-based selection in evolutionary multiobjective optimization//Proceedings of the 3rd Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation Conference. San Francisco, USA, 2001: 283-290.
- [7] Zhang Q, Li H. MOEA/D: A multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2007, 11(6): 712-731.
- [8] Liu H, Gu F, Zhang Q. Decomposition of a multiobjective optimization problem into a number of simple multiobjective subproblems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2014, 18(3): 450-455.
- [9] Cheng R, Jin Y, Olhofer M, et al. A reference vector guided evolutionary algorithm for many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(5): 773-791.
- [10] Zitzler E, Künzli S. Indicator-based selection in multiobjective search//Proceedings of the International Conference on Parallel Problem Solving from Nature. Berlin, Germany, 2004: 832-842.
- [11] Beume N, Naujoks B, Emmerich M. SMS-EMOA: Multiobjective selection based on dominated hypervolume. *European Journal of Operational Research*, 2007, 181(3): 1653-1669.
- [12] Bader J, Zitzler E. HypE: An algorithm for fast hypervolume-based many-objective optimization. *Evolutionary Computation*, 2011, 19(1):45-76.
- [13] Khalilpourazari S, Khamseh A A. Bi-objective emergency blood supply chain network design in earthquake considering earthquake magnitude: a comprehensive study with real world application. *Annals of Operations Research*, 2019, 283(1): 355-393.
- [14] Behzadi A, Habibollahzade A, Ahmadi P, et al. Multi-objective design optimization of a solar based system for electricity, cooling, and hydrogen production. *Energy*, 2019, 169: 696-709.
- [15] Guo Y, Cheng J, Luo S, et al. Robust dynamic multi-objective vehicle routing optimization method. *IEEE/ACM transactions on computational biology and bioinformatics*, 2017, 15(6): 1891-1903.
- [16] Zheng Jin-Hua, Zou Juan. Multi-objective evolutionary optimization. Beijing, China: Science Press, 2017. (in Chinese)
(郑金华, 邹娟. 多目标进化优化. 北京, 中国: 科学出版社, 2017.)
- [17] Coello Coello A C, Lamont G B, Van Veldhuizen D A. *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*. New York, USA: Springer, 2007.
- [18] Jiang S, Ong Y S, Zhang J, et al. Consistencies and contradictions of performance metrics in multiobjective optimization. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2014, 44(12): 2391-2404.
- [19] Ding J, Yang C, Xiao Q, et al. Dynamic evolutionary multiobjective optimization for raw ore allocation in mineral processing. *IEEE Transactions on Emerging Topics in Computational Intelligence*, 2018, 3(1): 36-48.
- [20] Ismayilov G, Topcuoglu H R. Neural network based multi-objective evolutionary algorithm for dynamic workflow scheduling in cloud computing. *Future Generation Computer Systems*, 2020, 102: 307-322.

- [21] Cabrera A, Acosta A, Almeida F, et al. A dynamic multi-objective approach for dynamic load balancing in heterogeneous systems. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 2020, 31(10): 2421-2434.
- [22] Van Veldhuizen D A, Lamont G B. On measuring multiobjective evolutionary algorithm performance//*Proceedings of the 2000 Congress on Evolutionary Computation*. La Jolla, USA, 2000: 204-211.
- [23] Van Veldhuizen D A, Lamont G B. Multiobjective evolutionary algorithm test suites//*Proceedings of the ACM Symposium on Applied Computing*. San Antonio, USA, 1999: 351-357.
- [24] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective optimization using evolutionary algorithms—a comparative case study//*Proceedings of the International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*. Berlin, Germany, 1998: 292-301.
- [25] Van Veldhuizen D A, Lamont G B. Evolutionary computation and convergence to a pareto front//*Proceedings of the Late breaking papers at the genetic programming 1998 conference*. Wisconsin, USA, 1998: 221-228.
- [26] Deb K, Agrawal S, Pratap A, et al. A fast elitist non-dominated sorting genetic algorithm for multi-objective optimization: NSGA-II//*Proceedings of the International Conference on Parallel Problem Solving from Nature*. Berlin, Germany, 2000: 849-858.
- [27] Zitzler E. Evolutionary algorithms for multiobjective optimization: methods and applications. [Ph.D. Thesis]. Swiss Federal Institute of Technology (ETH), Zürich, Switzerland, 1999.
- [28] Schott J R. Fault tolerant design using single and multicriteria genetic algorithm optimization. [Master's thesis]. Air Force Institute of Technology Wright-Patterson AFB OH, Ohio, USA, 1995.
- [29] Zhou A, Jin Y, Zhang Q, et al. Combining model-based and genetics-based offspring generation for multi-objective optimization using a convergence criterion//*Proceedings of the IEEE International Conference on Evolutionary Computation*. Vancouver, Canada, 2006: 892-899.
- [30] Coello Coello C A, Cortes N C. Solving multiobjective optimization problems using an artificial immune system. *Genetic Programming and Evolvable Machines*, 2005, 6(2): 163-190.
- [31] Schutze O, Esquivel X, Lara A, et al. Using the averaged Hausdorff distance as a performance measure in evolutionary multiobjective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2012, 16(4): 504-522.
- [32] Heinonen J. *Lectures on analysis on metric spaces*. Berlin, Germany: Springer Science & Business Media, 2012.
- [33] Zitzler E, Thiele L. Multiobjective evolutionary algorithms: a comparative case study and the strength Pareto approach. *IEEE transactions on Evolutionary Computation*, 1999, 3(4): 257-271.
- [34] Fleming P J, Purshouse R C, Lygoe R J. Many-objective optimization: An engineering design perspective//*Proceedings of the International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Berlin, Germany, 2005: 14-32.
- [35] Azzouz R, Bechikh S, Said L B. Dynamic multi-objective optimization using evolutionary algorithms: a survey//Bechikh S, Datta R, Gupta A. *Recent advances in evolutionary multi-objective optimization*. Cham, Switzerland: Springer, 2017: 31-70.
- [36] Yue C, Qu B, Liang J. A multi-objective particle swarm optimizer using ring topology for solving multimodal multi-objective problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 22(5): 805-817.
- [37] Wang Li-Ping, Feng Mei-Ling, Qiu Qi-Cang, et al. Survey on preference-based multi-objective evolutionary algorithms. *Chinese Journal of Computers*, 2019, 42(6): 1289-1315. (in Chinese)
(王丽萍, 丰美玲, 邱启仓等. 偏好多目标进化算法研究综述. *计算机学报*, 2019, 42(6): 1289-1315.)
- [38] Li Q, Zou J, Yeang S, et al. A predictive strategy based on special points for evolutionary dynamic multi-objective optimization. *Soft Computing*, 2018(1): 1-17.
- [39] Tanabe R, Ishibuchi H. A review of evolutionary multimodal multiobjective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 24(1): 193-200.
- [40] Wickramasinghe U K, Carrese R, Li X. Designing airfoils using a reference point based evolutionary many-objective particle swarm optimization algorithm//*Proceedings of the 2010 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Barcelona, Spain, 2010: 1-8.
- [41] Mohammadi A, Omidvar M N, Li X. A new performance metric for user-preference based multi-objective evolutionary algorithms//*Proceedings of the 2013 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Cancún, México, 2013: 2825-2832.
- [42] Yu-Guo. Study of preference-based multi-objective evolutionary algorithm and related indicator with decomposition. [M.E. thesis]. Xiangtan University, Hunan, China, 2015. (in Chinese)
(喻果. 基于分解的偏好多目标进化算法及其评价指标的研究[硕士学位论文]. 湘潭大学, 湖南, 中国, 2015.)
- [43] Zhou A, Jin Y, Zhang Q, et al. Prediction-based population re-initialization for evolutionary dynamic multi-objective optimization//*Proceedings of the International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Berlin, Germany, 2007: 832-846.

- [44] Chen R, Li K, Yao X. Dynamic multiobjectives optimization with a changing number of objectives. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 22(1): 157-171.
- [45] Zou J, Li Q, Yang S, et al. A prediction strategy based on center points and knee points for evolutionary dynamic multi-objective optimization. *Applied Soft Computing*, 2017, 61(12): 806-818.
- [46] Zhou A, Zhang Q, Jin Y. Approximating the set of Pareto-optimal solutions in both the decision and objective spaces by an estimation of distribution algorithm. *IEEE transactions on Evolutionary Computation*, 2009, 13(5): 1167-1189.
- [47] Yue C, Qu B, Liang J. A multiobjective particle swarm optimizer using ring topology for solving multimodal multiobjective problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2017, 22(5): 805-817.
- [48] Tsou C S, Fang H H, Chang H H, et al. An improved particle swarm Pareto optimizer with local search and clustering// *Proceedings of the Asia-Pacific Conference on Simulated Evolution and Learning*. Berlin, Germany, 2006: 400-407.
- [49] Knowles J, Corne D. On metrics for comparing nondominated sets//*Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation*. Honolulu USA, 2002: 711-716.
- [50] Zitzler E, Thiele L, Laumanns M, et al. Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2003, 7(2): 117-132.
- [51] Yen G G, He Z. Performance metric ensemble for multiobjective evolutionary algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2013, 18(1): 131-144.
- [52] Okabe T, Jin Y, Sendhoff B. A critical survey of performance indices for multi-objective optimisation//*Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation*. Canberra, Australia, 2003: 878-885.
- [53] Laszczyk M, Myszkowski P B. Survey of quality measures for multi-objective optimization: Construction of complementary set of multi-objective quality measures. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2019, 48: 109-133.
- [54] Li M Q, Yao X. Quality evaluation of solution sets in multiobjective optimisation: A survey. *ACM Computing Surveys (CSUR)*, 2019, 52(2): 1-38.
- [55] Tan K C, Lee T H, Khor E F. Evolutionary algorithms for multi-objective optimization: Performance assessments and comparisons. *Artificial Intelligence Review*, 2002, 17(4): 251-290.
- [56] Xie Cheng-Wang, Wang Zhi-Jie, Xia Xue-Wen. Multi-objective evolutionary algorithm based on archive-elite learning and opposition-based learning. *Chinese Journal of Computers*, 2017, 40(3): 757-772. (in Chinese)
- (谢承旺, 王志杰, 夏学文. 应用档案精英学习和反向学习的多目标进化算法. *计算机学报*, 2017, 40(3): 757-772.)
- [57] Deb K, Jain S. Running performance metrics for evolutionary multi-objective optimization. Kanpur, India: Indian Institute of Tehnology Kanpur, Kanga Report: No. 2002004, 2002.
- [58] Li K, Chen R Z, Min G Y, et al. Integration of preferences in decomposition multiobjective optimization. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2018, 48(12): 3359-3370.
- [59] Yi J, Bai J, He H, et al. ar-MOEA: A novel preference-based dominance relation for evolutionary multiobjective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 23(5): 788-802.
- [60] Liu R, Zhou R, Ren R, et al. Multi-layer interaction preference based multi-objective evolutionary algorithm through decomposition. *Information Sciences*, 2020, 509: 420-436.
- [61] Liu Ruo-Chen, Li Jian-Xia, Liu Jing, et al. A survey on dynamic multi-objective optimization. *Chinese Journal of Computers*, 2020(7): 1246-1278. (in Chinese)
- (刘若辰, 李建霞, 刘静等. 动态多目标优化研究综述. *计算机学报*, 2020(7): 1246-1278.)
- [62] Zhang Q, Yang S, Jiang S, et al. Novel Prediction Strategies for Dynamic Multiobjective Optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 24(2): 260-274.
- [63] Cao L, Xu L, Goodman E D, et al. Evolutionary dynamic multiobjective optimization assisted by a support vector regression predictor. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 24(2): 305-319.
- [64] Qu B, Li G, Guo Q, et al. A niching multi-objective harmony search algorithm for multimodal multi-objective problems//*Proceedings of the 2019 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Wellington, New Zealand, 2019: 1267-1274.
- [65] Liang J, Xu W, Yue C, et al. Multimodal multiobjective optimization with differential evolution. *Swarm and evolutionary computation*, 2019, 44: 1028-1059.
- [66] Qu B, Li C, Liang J, et al. A self-organized speciation based multi-objective particle swarm optimizer for multimodal multi-objective problems. *Applied Soft Computing*, 2020, 86: 105886.
- [67] Hansen M P, Jaskiewicz A. Evaluating the Quality of Approximations to the Non-Dominated Set. Copenhagen, Denmark: Technical University of Denmark, IMM Technical Report: IMM-REP-1998-7, 1998.

- [68] Goh C, Kay C T. A competitive-cooperative coevolutionary paradigm for dynamic multiobjective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2009, 13(1): 103-127.
- [69] Wu J, Azarm S. Metrics for quality assessment of a multiobjective design optimization solution set. *Journal of Mechanical Design*, 2001, 123(1): 18-25.
- [70] Zitzler E, Deb K, Thiele L. Comparison of multiobjective evolutionary algorithms: Empirical results. *Evolutionary Computation*, 2000, 8(2): 173-195.
- [71] Deb K, Thiele L, Laumanns M, et al. Scalable test problems for evolutionary multiobjective optimization//*Proceedings of the Evolutionary Multiobjective Optimization*. London, UK, 2005: 105-145.
- [72] Fogel D B. *Evolutionary algorithms in theory and practice. Complexity*, 1997, 2(4):26-27.
- [73] Rudolph G. Evolutionary search for minimal elements in partially ordered finite sets//*Proceedings of the International Conference on Evolutionary Programming*. Berlin, Germany, 1998: 345-353.
- [74] Serfozo R. *Basics of applied stochastic processes*. Berlin, Germany: Springer Science & Business Media, 2009.
- [75] Wang Li-Ping, Qiu Fei-Yue. *Complex multi-objective optimization and it's applications*. Beijing, China: Science Press, 2018. (in Chinese)
(王丽萍, 邱飞岳. 复杂多目标问题的优化方法及应用. 北京, 中国: 科学出版社, 2018.)
- [76] Ishibuchi H, Masuda H, Tanigaki Y, et al. Modified distance calculation in generational distance and inverted generational distance//*Proceedings of the International conference on evolutionary multi-criterion optimization*. Cham, Switzerland, 2015: 110-125.
- [77] Van Veldhuizen D A. *Multiobjective evolutionary algorithms: Classifications, analyses, and new innovations*. [Ph.D. thesis]. Air Force Institute of Technology Wright-Partterson AFB OH, Ohio, USA, 1999.
- [78] Zhang Q, Liu W, Li H. The performance of a new version of MOEA/D on CEC09 unconstrained MOP test instances// *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Trondheim, Norwa, 2009: 203-208.
- [79] Wang H, Jin Y, Yao X. Diversity assessment in many-objective optimization. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(6): 1510-1522.
- [80] Srinivas N, Deb K. Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. *Evolutionary Computation*, 1994, 2(3): 221-248.
- [81] Li Mi-Qing, Zheng Jin-Hua. An indictor for assessing the speard of solutions in multi-objective evolutionary algorithm. *Chinese Journal of Computers*, 2011(4): 57-74. (in Chinese)
(李密青, 郑金华. 一种多目标进化算法解集分布广度评价方法. 计算机学报, 2011(4): 57-74.)
- [82] Ibrahim A, Rahnamayan S, Martin M V, et al. 3D-RadVis Antenna: Visualization and performance measure for many-objective optimization. *Swarm and evolutionary computation*, 2018, 39: 157-176.
- [83] Cai X, Sun H, Fan Z. A diversity indicator based on reference vectors for many-objective optimization. *Information Sciences*, 2018, 430: 467-486.
- [84] Khare V, Yao X, Deb K. Performance scaling of multi-objective evolutionary algorithms//*Proceedings of the International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. Berlin, Germany, 2003: 376-390.
- [85] Jiang S, Yang S, Li M. On the use of hypervolume for diversity measurement of Pareto front approximations//*Proceedings of the 2016 IEEE symposium series on computational intelligence*. Athens, Greece, 2016: 1-8.
- [86] Tian Y, Cheng R, Zhang X, et al. Diversity assessment of multi-objective evolutionary algorithms: Performance metric and benchmark problems [Research Frontier]. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2019, 14(3): 61-74.
- [87] Li M, Yang S, Liu X. Diversity comparison of Pareto front approximations in many-objective optimization. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2014, 44(12): 2568-2584.
- [88] Asafuddoula M, Ray T, Singh H K. Characterizing Pareto front approximations in many-objective optimization//*Proceedings of the 2015 Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation*. Madrid, Spain, 2015: 607-614.
- [89] Farhang-Mehr A, Azarm S. Diversity assessment of Pareto optimal solution sets: an entropy approach//*Proceedings of the 2002 Congress on Evolutionary Computation*. Honolulu, USA, 2002: 723-728.
- [90] Wang Y, Wu L, Yuan X. Multi-objective self-adaptive differential evolution with elitist archive and crowding entropy-based diversity measure. *Soft Computing*, 2010, 14(3): 193-209.
- [91] Mostaghim S, Teich J. A new approach on many objective diversity measurement//*Proceedings of the Dagstuhl Seminar Proceedings*. Saarland, German, 2005: 1-15.
- [92] Li Mi-Qing, Zheng Jin-Hua, Xie Jiong-Liang, et al. A stepwise diversity metric for MOEA. *Acta Electronica Sinica*, 2008, 36(10): 1986-1991. (in Chinese)

- (李密青, 郑金华, 谢炯亮等. 一种 MOEA 分布度的逐步评价方法. 电子学报, 2008, 36(10): 1986-1991.)
- [93] Tian Y, Cheng R, Zhang X, et al. PlatEMO: A MATLAB platform for evolutionary multi-objective optimization [educational forum]. IEEE Computational Intelligence Magazine, 2017, 12(4): 73-87.
- [94] Czyzżak P, Jaskiewicz A. Pareto simulated annealing—A metaheuristic technique for multiple-objective combinatorial optimization. Journal of Multi-Criteria Decision Analysis, 1998, 7(1): 34-47.
- [95] Dilettoso E, Rizzo S A, Salerno N. A weakly Pareto compliant quality indicator. Mathematical and Computational Applications, 2017, 22(1): 25.
- [96] Tian Y, Zhang X, Cheng R, et al. A multi-objective evolutionary algorithm based on an enhanced inverted generational distance metric//Proceedings of the 2016 IEEE congress on evolutionary computation. Vancouver, Canada, 2016: 5222-5229.
- [97] Li M, Yang S, Liu X. A performance comparison indicator for Pareto front approximations in many-objective optimization//Proceedings of the 2015 Annual Conference on Genetic and Evolutionary Computation. Madrid, Spain, 2015: 703-710.
- [98] Robert G B. The elements of integration and lebesgue measure. New York, USA: Wiley, 1995.
- [99] Fleischer M. The Measure of Pareto Optima//Proceedings of the International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Berlin, German, 2003: 519-533.
- [100] Knowles J D, Corne D W, Fleischer M. Bounded archiving using the Lebesgue measure//Proceedings of the 2003 Congress on Evolutionary Computation. Canberra, Australia, 2003: 2490-2497.
- [101] Emmerich M, Beume N, Naujoks B. An EMO algorithm using the hypervolume measure as selection criterion//Proceedings of the International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Berlin, German, 2005: 62-76.
- [102] Knowles J, Corne D. Properties of an adaptive archiving algorithm for storing nondominated vectors. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2003, 7(2): 100-116.
- [103] Bringmann K, Friedrich T. Approximating the least hypervolume contributor: NP-hard in general, but fast in practice//Proceedings of the International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Berlin, German, 2009: 6-20.
- [104] While L, Bradstreet L. Applying the WFG algorithm to calculate incremental hypervolumes//Proceedings of the 2012 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Brisbane, Australia, 2012: 1-8.
- [105] While L, Bradstreet L, Barone L. A fast way of calculating exact hypervolumes. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2011, 16(1): 86-95.
- [106] He Z, Yen G G. Visualization and performance metric in many-objective optimization. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2015, 20(3): 386-402.
- [107] Jian J R, Zhan Z H, Zhang J. Large-scale evolutionary optimization: A survey and experimental comparative study. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2020, 11(3): 729-745.
- [108] Li X, Branke J, Kirley M. On performance metrics and particle swarm methods for dynamic multiobjective optimization problems//Proceedings of the 2007 IEEE Congress on Evolutionary Computation. Singapore, 2007: 576-583.
- [109] Jiang S, Yang S. Evolutionary dynamic multiobjective optimization: Benchmarks and algorithm comparisons. IEEE transactions on cybernetics, 2016, 47(1): 198-211.
- [110] Parsons L, Haque E, Liu H. Subspace clustering for high dimensional data: a review. ACM Sigkdd Explorations Newsletter, 2004, 6(1): 90-105.
- [111] Beyer K, Goldstein J, Ramakrishnan R, et al. When is "nearest neighbor" meaningful?//Proceedings of the International Conference on Database Theory. Berlin, Germany, 1999: 217-235.
- [112] Huband S, Barone L, While L, et al. A scalable multi-objective test problem toolkit//Proceedings of the International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization. Berlin, Germany, 2005: 280-295.
- [113] Gupta A, Ong Y S, Feng L. Multifactorial evolution: toward evolutionary multitasking. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2015, 20(3): 343-357.
- [114] Ong Y S, Gupta A. Evolutionary multitasking: a computer science view of cognitive multitasking. Cognitive Computation, 2016, 8(2): 125-142.
- [115] Zheng X, Qin A K, Gong M, et al. Self-regulated Evolutionary Multi-task Optimization. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 24(1): 16-28.
- [116] He C, Li L, Tian Y, et al. Accelerating large-scale multiobjective optimization via problem reformulation. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2019, 23(6): 949-961.
- [117] Hong W, Tang K, Zhou A, et al. A scalable indicator-based evolutionary algorithm for large-scale multiobjective optimization. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2018, 23(3): 525-537.

- [118] Goh C K, Tan K C. A competitive-cooperative coevolutionary paradigm for dynamic multiobjective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2008, 13(1): 103-127.
- [119] Zhou A, Jin Y, Zhang Q. A population prediction strategy for evolutionary dynamic multiobjective optimization. *IEEE transactions on cybernetics*, 2013, 44(1): 40-53.

- [120] Ishibuchi H, Peng Y, Shang K. A Scalable Multimodal Multiobjective Test Problem//*Proceedings of the 2019 IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Wellington, New Zealand, 2019: 310-317.

附录 X.

定理 6. 对于同一个解集 S , γ 始终不小于 GD。

证明. 即证:

$$\sum_{i=1}^N d_i \geq \sqrt{\sum_{i=1}^N d_i^2} \quad (133)$$

其中 $d_i \geq 0$, 即证 $\sum_{i=1}^n d_i \geq \sqrt{\sum_{i=1}^n d_i^2}$ ($n \leq N$) 成立。 $n = 1$ 时显然成立, 下面证明 $n = 2$ 时成立。根据三角不等式:

$$d_i + d_{i+1} \geq \sqrt{d_i^2 + d_{i+1}^2} \quad (134)$$

其中 $\sqrt{d_i^2 + d_{i+1}^2}$ 可以看作直角三角形的斜边, 当 $d_i = 0$ 或 $d_{i+1} = 0$ 时不等式(134)取到等号。将 $\sqrt{d_i^2 + d_{i+1}^2}$ 看作新的 d_i , d_{i+2} 看作新的 d_{i+1} , 代入不等式(134)得:

$$\begin{aligned} d_i + d_{i+1} + d_{i+2} &\geq \sqrt{d_i^2 + d_{i+1}^2} + d_{i+2} \\ &\geq \sqrt{\left(\sqrt{d_i^2 + d_{i+1}^2}\right)^2 + d_{i+2}^2} = \sqrt{d_i^2 + d_{i+1}^2 + d_{i+2}^2} \end{aligned} \quad (135)$$

故当 $n = 2$ 时成立, 假设 $n = k$ ($k < N$) 成立, 证明 $n = k + 1$ 时成立:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} d_i &\geq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^k d_i\right)^2} + d_{k+1} \\ &\geq \sqrt{\left(\sqrt{\sum_{i=1}^k d_i^2}\right)^2 + d_{k+1}^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} d_i^2} \end{aligned} \quad (136)$$

根据数学归纳法, 得证。当只有一个 $d_i \neq 0$ 时不等式取到等号。证毕。

定理 7 & 定理 8. 对于同一个解集 S , $\text{GD}(S, P, j) \geq \text{GD}(S, P, k)$, $\text{IGD}(P, S, j) \geq \text{IGD}(P, S, k)$, 其中 $j < k$ 。

证明. 即证:

$$\left(\sum_{i=1}^N d_i^j\right)^{\frac{1}{j}} \geq \left(\sum_{i=1}^N d_i^k\right)^{\frac{1}{k}} \quad (137)$$

其中 $d_i \geq 0$, 即证 $\left(\sum_{i=1}^n d_i^j\right)^{\frac{1}{j}} \geq \left(\sum_{i=1}^n d_i^k\right)^{\frac{1}{k}}$ ($n \leq N$) 成立。

$n = 1$ 时显然成立, 下面证明 $n = 2$ 时成立。不等式(137)的左边是以 j 为变量的函数 $F(j)$, 即证 $F(j) \geq F(k)$, 即证函数 $F(x)$ ($x \geq 1$) 单调递减, 即证 $F'(x) \leq 0$ 。

设 $d_1 = a, d_2 = b$, 则 $F(x) = (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}}$, 令 $F(x) = e^{G(x)}$, 则 $G(x) = \frac{\ln(a^x + b^x)}{x}$, 即证 $G'(x) \leq 0$ 。当 $b = 0$ 时, $G'(x) = 0$ 成立, 当 $b \neq 0$ 时, 有:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left(\frac{\ln(a^x + b^x)}{x}\right)' \\ &= \left(\ln(b) + \frac{\ln\left(\left(\frac{a}{b}\right)^x + 1\right)}{x}\right)' \quad (b \neq 0) \end{aligned} \quad (138)$$

令 $\frac{a}{b} = p, p \in (0, +\infty)$, 即:

$$\begin{aligned} G'(x) &= \left(\frac{\ln(p^x + 1)}{x}\right)' = \frac{p^x \ln(p)}{p^x + 1} - \frac{\ln(p^x + 1)}{x^2} \\ &= \frac{p^x \ln(p) - (p^x + 1) \ln(p^x + 1)}{x^2(p^x + 1)} \quad (x \geq 1) \end{aligned} \quad (139)$$

其中 $x^2(p^x + 1) > 0$, 令 $G'(x) = \frac{H(x)}{x^2(p^x + 1)}$, 则:

当 $p = 1$ 时, 显然 $H(x) < 0$ 。

当 $p \in (0, 1)$ 时, $p^x \ln(p) < 0$, $(p^x + 1) > 0$, $\ln(p^x + 1) > 0$, 故 $H(x) < 0$ 。

当 $p \in (1, +\infty)$ 时, 有 $p \leq p^x$ ($x \geq 1$), 则

$$0 < \ln(p) \leq \ln(p^x) < \ln(p^x + 1) \quad (140)$$

又有 $0 < p^x < p^x + 1$, 故 $H(x) < 0$ 。

故当 $n = 2$ 时成立, 假设 $n = k$ ($k < N$) 成立, 证明 $n = k + 1$ 时成立:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} (d_i^j)^{\frac{1}{j}} &\geq \sum_{i=1}^k (d_i^j)^{\frac{1}{j}} + d_{k+1} \\ &\geq \left(\sum_{i=1}^k (d_i^j)^{\frac{1}{j}} + d_{k+1}^j \right)^{\frac{1}{k}} = \sum_{i=1}^{k+1} (d_i^k)^{\frac{1}{k}} \end{aligned} \quad (141)$$

根据数学归纳法，得证。当只有一个 $d_i \neq 0$ 时不等式取到等号。证毕。



Wang Li-Ping, Ph.D., Professor. Her main research interests include computing intelligence and decision optimization.

Ren Yu, M. S. candidate. His main research interests include computing intelligence, decision optimization.

Qiu Qi-Cang, M. S. His main research interest is intelligent control.

Qiu Fei-Yue, Ph.D., Professor. His main research interests include intelligent control, deep learning.

Background

This research is supported by Zhejiang Provincial Natural Science Foundation of China under Grant No. LQ20F020014, Zhejiang Provincial Key Research and Development of China under Grant No. 2018C01080, and National Natural Science Foundation of China under Grant No. 61472366, 61379077.

In order to solve various optimization problems, evolutionary algorithms should be chosen wisely to deal with different kinds of problem characteristics, thus how to compare the performance of those algorithms has become an enduring topic in the research field of evolutionary computation. In that case, the importance of indicators doesn't need to be overemphasized.

The performance of evolutionary algorithms should be considered in three aspects: 1) The quality of solution set, including the convergence and diversity; 2) The efficiency of

algorithms, including time complexity and cost; 3) The robustness of algorithms, reflecting the ability to solve different problems. The indicators mainly take the quality of solution set into consider.

we categorize the indicators into four groups based on evaluation mechanism: counting indicators, convergence indicators, diversity indicators, and comprehensive indicators. The diversity indicators are further divided into distribution indicators, spread indicators, and indicators measuring both distribution and spread according to property. Comprehensive indicators are further divided into general indicators and special indicators for specific problems by scope of application. Furthermore, we analyze some indicators from four aspects: many-objective adaptability, outlier sensitivity, reference set rationality, and value optimality.