

# 一种采用混合策略的大规模多目标进化算法

谢承旺<sup>1)</sup> 潘嘉敏<sup>2)</sup> 郭华<sup>3)</sup> 王冬梅<sup>1)</sup> 付世炜<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(华南师范大学数据科学与工程学院 广东 汕尾 516600)

<sup>2)</sup>(南宁师范大学计算机与信息工程学院 南宁 530100)

<sup>3)</sup>(成都职业技术学院软件学院 成都 610041)

**摘要** 现实中存在大量的大规模多目标优化问题,这些问题所固有的目标函数间冲突性、巨大的搜索空间以及决策变量可能存在的交互等特征对传统的多目标进化算法构成了巨大的挑战.研究者根据此类问题的特点基于不同的视角提出了多种大规模多目标进化算法,但它们在解题的质量和效率方面尚存较大的提升空间.基于此,提出一种采用混合策略的大规模多目标进化算法 LSMOEA/HS.该算法提出的一种黄金分层分组方法将大规模决策变量分成收敛性组和多样性组,然后对收敛性变量组执行基于变量组的相关性检测操作,将收敛性变量组划分成若干更小规模的子组,最后算法采用不同的优化策略分别优化收敛性变量组和多样性变量组以获得最终的解题结果.为验证 LSMOEA/HS 的有效性,将其与五种新近提出的高效的大规模多目标进化算法一同在决策变量维度为 200、500、1000、2000 和 5000 的 2-目标和 3-目标的 LSMOP 系列测试实例上进行 IGD 和 HV 性能测试,实验结果表明 LSMOEA/HS 具有显著较优的收敛性和多样性.由此表明,LSMOEA/HS 是一种颇具前景的大规模多目标进化算法.

**关键词** 大规模多目标优化问题;变量分组;进化算法;收敛性;多样性;大规模多目标进化算法

**中图法分类号** TP181 **DOI号** 10.11897/SP.J.1016.2024.00069

## A Large Scale Multi-Objective Evolutionary Algorithm Adopting Hybrid Strategies

XIE Cheng-Wang<sup>1)</sup> PAN Jia-Min<sup>2)</sup> GUO Hua<sup>3)</sup> WANG Dong-Mei<sup>1)</sup> FU Shi-Wei<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(School of Data Science and Engineering, South China Normal University, Shanwei, Guangdong 516600)

<sup>2)</sup>(College of Computer and Information Engineering, Nanning Normal University, Nanning 530100)

<sup>3)</sup>(School of Software, Chengdu Polytechnic, Chengdu 610041)

**Abstract** There exist a number of large-scale multiobjective optimization problems (LSMOPs) in reality. These LSMOPs admit some inherent characteristics such as the inherent conflicts among their objective functions, huge search space (decision variable space), and possible interaction existing in decision variables, which raise great challenges to the classical multiobjective evolutionary algorithms (MOEAs). Based on the characteristics of the LSMOPs, researchers have proposed a variety of large-scale multiobjective evolutionary algorithms (LSMOEAs) from different perspectives. However, these LSMOEAs are still far from satisfactory in terms of problem-solving quality and efficiency, leading an urgent need to improve significantly both the quality and efficiency. Motivated by these observations, a large-scale multiobjective evolutionary algorithm based a hybrid strategy, termed as LSMOEA/HS, is proposed in this paper. The LSMOEA/HS proposes a golden grouping method to divide large-scale decision variables into two groups, the convergence group and the diversity group. For the convergence group, a correlation detection operator based group is proposed to divide the convergence group into several subgroups of smaller

size. Finally, in order to obtain the final solution set, the algorithm adopts different optimization strategies to optimize the convergent variable group and the diversity variable group respectively. In order to verify the effectiveness of LSMOEA/HS, an empirical comparison with five other newly developed efficient large-scale multiobjective evolutionary algorithms is performed in this paper. In this experimental comparison, both 2-objective and 3-objective benchmark LSMOP suite with decision variable dimensions of 200, 500, 1000, 2000 and 5000 are used as test instances, and the *IGD* and *HV* are selected as performance indicators. The empirical results show that LSMOEA/HS has achieved significantly better results in terms of both the convergence and diversity. It shows that LSMOEA/HS is a promising large-scale multi-objective evolutionary algorithm with potential to solve large-scale multiobjective optimization problems.

**Keywords** large-scale multi-objective optimization problems; variable grouping; evolutionary algorithm; convergence; diversity; large-scale multi-objective evolutionary algorithm

## 1 引 言

现实应用中普遍存在大规模多目标优化问题 (Large-Scale Multi-Objective Optimization Problems, LSMOPs)<sup>[1]</sup>. 通常, LSMOPs 指含有两个或三个相互冲突的目标函数且决策空间维度超过 100 的优化问题<sup>[2]</sup>. 作为一类较困难的多目标优化问题 (Multi-Objective Optimization Problems, MOPs), LSMOPs 带来的挑战主要表现在两个方面<sup>[3-4]</sup>: (1) 相对目标空间而言, 由于目标函数间相互冲突, 使得其并不存在单个最优解, 而是期望获得一组收敛性好且均匀分布的 Pareto 最优解; (2) 相对决策空间而言, 随着决策变量数目线性增加, 其决策空间规模呈指数级扩张. 此外, 决策变量间还可能存在着不同的交互 (interaction). 上述挑战使得传统的多目标进化算法 (Multi-Objective Evolutionary Algorithms, MOEAs) 在求解 LSMOPs 时容易出现性能恶化<sup>[5]</sup>. 究其原因: 一方面, 由于决策空间呈指数级扩张, 易于产生“维数灾难”问题; 另一方面, 一些 MOEAs 的变化算子 (包括杂交和变异算子) 不再适用于 LSMOPs, 使得它们在高维度决策空间搜索效率低下, 收敛性变差. 实际上, 如何处理大规模决策变量以降低求解 LSMOPs 的难度已成为大规模多目标优化领域的研究热点.

迄今, 以处理大规模决策变量为核心, 研究者提出了一些大规模多目标进化算法 (Large-Scale Multi-Objective Evolutionary Algorithms, LSMOEA). 根据这些算法使用的主要技术可将它们粗略地分成三类: (1) 利用“分而治之”策略将大规模决策变量

分成不同组, 从而将 LSMOPs 转化成若干较小规模的 MOPs 进行求解<sup>[6]</sup>; (2) 采用问题转化方法将 LSMOPs 转化成低维问题求解<sup>[7-8]</sup>; (3) 基于学习的方法设计学习算子或策略, 将大规模决策变量进行整体优化<sup>[9-12]</sup>. 上述算法虽在一些 LSMOPs 上具有较好的性能, 但它们仍有缺点. 首先, “分而治之”策略存在计算代价高昂和变量分组准确性有待提高的问题, 而且分组后的子问题仍有可能是 LSMOPs, 难以从根本上解决问题. 其次, 问题转化方法可能存在丢失全局最优解的问题, 而且选择合适的转化或重构函数也较困难. 最后, 已有的学习算子或策略很少能分开指导收敛性和多样性, 算法的性能尚待提高. 此外, 基于学习的方法在高维决策空间仍难以有效地搜索.

不难发现, 尽管有关 LSMOEA 的研究已取得一定进展, 但其性能仍有较大提升空间. 另外, LSMOPs 普遍存在挑战, 也迫切需要发展新的 LSMOEA. 有鉴于此, 本文提出一种采用混合策略的大规模多目标进化算法 LSMOEA/HS (Large Scale Multi-Objective Evolutionary Algorithm Adopting Hybrid Strategies). 该算法以大规模决策变量的处理为核心, 与已有的 LSMOEA 相比, 其主要特点有: (1) 提出一种黄金分层分组方法将大规模决策变量分成收敛性组和多样性组. 具体地, 通过对变量随机采样, 并根据对应目标空间的非支配排序结果, 以黄金分割点为阈值对变量实施分组; (2) 提出一种基于组的相关性检测方法, 该方法以变量组为单元, 检测当前变量与待检测的变量组均值之间的相关性. 具体地, 如果检测中发现当前变量与变量组均值之间的相关性很低, 则不再检测当前变量与该组内各变量间的交互; 反

之,如果当前变量与变量组均值之间的相关性较高,则进一步检测当前变量与该组各变量之间的交互.这里在上述两种方法策略的基础上设计一种采用混合策略的 LSMOEA.主要思想如下:首先,运用黄金分层分组方法将大规模决策变量分成收敛性组和多样性组;然后对收敛性组进一步执行基于组(group)的相关性(correlation)检测,将收敛性组划分成规模更小的子组(subgroups);接着,运用收敛性优化策略优化各收敛性子组,利用多样性优化策略对多样性组实施整体优化. LSMOEA/HS 与五种新近提出的代表性 LSMOEAs,如 MOEA/DVA<sup>[13]</sup>、LMEA<sup>[14]</sup>、LMOCSSO<sup>[11]</sup>、LMOEA-DS<sup>[15]</sup>和 IM-MOEA/D<sup>[16]</sup>,一同在 2-目标和 3-目标的 LSMOP1~LSMOP9<sup>[17]</sup>基准问题上测试反转世代距离 IGD<sup>[18]</sup>(Inverted Generational Distance)和超体积 HV<sup>[19]</sup>(Hypervolume)等指标值,其中测试问题的决策变量数目分别设为 200、500、1000、2000 和 5000.实验表明 LSMOEA/HS 具有显著较优的收敛性和多样性表现.

## 2 背景知识

### 2.1 LSMOPs 相关定义

**定义 1.** LSMOP. 不失一般性,以最小化问题为例,一个具有  $d$  个决策变量和  $m$  个目标的 MOP 可形式化定义如下:

$$\min f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  表示决策空间  $\Omega$  中任意的解点  $\mathbf{x}$  是  $d$  维决策向量,  $f(\mathbf{x})$  表示包含  $m$  个相互冲突且需最小化的目标函数向量.特别地,如果式(1)中的决策变量数目超过 100,则式(1)中的 MOP 又称为 LSMOP.正如式(1)所示,这里的 LSMOP 默认是不带约束条件的.

**定义 2.** Pareto 支配.对于任何两个解  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x}$  支配  $\mathbf{y}$  (记为  $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{y})$ ) 当且仅当  $f_i(\mathbf{x}) \leq f_i(\mathbf{y})$  ( $i=1, 2, \dots, m$ )  $\wedge \exists j \in (1:m): f_j(\mathbf{x}) < f_j(\mathbf{y})$  成立.

**定义 3.** 非支配.对于任何两个解  $\mathbf{x}$  和  $\mathbf{y}$ ,  $\mathbf{x}$  与  $\mathbf{y}$  如果是非支配关系,当且仅当  $\mathbf{x}$  不支配  $\mathbf{y}$  且  $\mathbf{y}$  不支配  $\mathbf{x}$ .

**定义 4.** Pareto 最优解.  $\mathbf{x}$  是 Pareto 最优解当且仅当决策空间  $\Omega$  中不存在任何其他的解  $\mathbf{y}$ ,使得  $\mathbf{y}$  支配  $\mathbf{x}$ .

**定义 5.** Pareto 解集. LSMOP 所有的 Pareto 最优解构成 Pareto 解集(Pareto optimal Set, PS).

**定义 6.** Pareto 前沿. LSMOP 所有 Pareto 最

优解在目标空间的投影构成了 Pareto 前沿(Pareto optimal Front, PF).

**定义 7.** 非劣解集. 设  $\mathbf{x}$  是种群  $P$  的非劣解,当且仅当  $P$  中不存在其他的解  $\mathbf{y}$ ,使得  $\mathbf{y}$  Pareto 支配  $\mathbf{x}$ .  $P$  中所有非劣解  $\mathbf{x}$  组成的集合称为  $P$  的非劣解集 NDS(Non-Dominated Solution Set).

**定义 8.** 极端解. 对于非劣解集 NDS,若  $\mathbf{x} \in$  NDS 且在 NDS 的某一目标上不存在比  $\mathbf{x}$  还小的解,则称  $\mathbf{x}$  为 NDS 中的极端解.

### 2.2 大规模函数和变量的相关概念

大规模函数优化经常涉及到对大规模决策变量进行分组,其分组过程涉及到函数可分性概念.下面是可分离函数的定义<sup>[13]</sup>.

**定义 9.** 可分离函数.  $f(\mathbf{x})$  是可分离函数,当且仅当  $\mathbf{x}$  中各决策变量  $x_i$  ( $i=1, \dots, d$ ) 均可独立地优化,即  $\arg \min_{(x_1, \dots, x_d)} f(x_1, \dots, x_d) = [\arg \min_{x_1} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_d), \dots, \arg \min_{x_i} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_d), \dots, \arg \min_{x_d} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_d)]$  成立. 否则,  $f(\mathbf{x})$  称为不可分离函数.

相应地,如果  $f(\mathbf{x})$  中部分决策变量不能独立地优化,则称其为部分可分离函数.极端情况下,  $f(\mathbf{x})$  所有决策变量均不能独立地优化,而只能整体优化,则称  $f(\mathbf{x})$  为完全不可分离函数.

两个变量如果能独立地优化,一般认为它们之间没有交互性.迄今关于变量交互性的定义很多,以下给出一种可量化且易于使用的定义<sup>[13]</sup>.

**定义 10.** 变量交互性. LSMOP 中任意两个决策变量  $x_i$  和  $x_j$  具有交互性,当且仅当存在决策向量  $\mathbf{x}$ , 以及实数  $a_1, a_2, b_1$  和  $b_2$  满足  $f(\mathbf{x})|_{x_i=a_2, x_j=b_1} < f(\mathbf{x})|_{x_i=a_1, x_j=b_1} \wedge f(\mathbf{x})|_{x_i=a_2, x_j=b_2} > f(\mathbf{x})|_{x_i=a_1, x_j=b_2}$ . 这里  $f(\mathbf{x})|_{x_i=a_2, x_j=b_1} \triangleq f(x_1, \dots, x_{i-1}, a_2, \dots, x_{j-1}, b_1, \dots, x_d)$ .

### 2.3 LSMOEAs 研究现状

近年来,随着各类 LSMOPs 不断涌现,研究者基于不同的背景和视角提出了一些 LSMOEAs.根据处理决策变量的方式可将这些算法分成如下类型:

(1) 决策变量分组. 这类方法主要包括随机分组<sup>[20]</sup>、差分分组<sup>[21]</sup>和变量分析<sup>[22]</sup>等. ① 随机分组利用“分而治之”策略将大规模决策变量随机地分成若干相同规模的组,然后轮流优化各组.该方法将一个 LSMOP 转化成若干较小规模的 MOP,然后运用经典的 MOEAs 解之.这种分组方法的优点是简单有效且易于实现,不足之处在于:首先,它并未考虑变量间的交互,倘若交互变量被分至不同组,算法将很

难搜索到全局最优解. 其次, 它需要预设分组的规模, 不同的 LSMOP 可能需要不同的规模, 不便于使用. 最后, 如果 LSMOP 决策变量规模巨大, 经过随机分组后, 它们仍可能是 LSMOP, 难以根本上解决问题; ② 差分分组. 该方法通过检测将交互变量划分至相同组, 然后轮流优化各组. 这类方法的优点在于它无需预设分组规模, 而且由于交互变量在同组优化, 有利于搜索全局最优解. 但这种方法需开销较多的计算资源用于变量检测. 另外, 由于变量的交互性与具体的目标函数相关, 因此差分分组用于 MOPs 要比 SOPs (Single Objective Optimization Problem) 复杂得多; ③ 变量分析. 该方法通过分析决策变量对 LSMOP 目标函数的贡献 (即收敛性和多样性影响) 进行分组, 然后采用不同的优化策略优化各组, 以获得收敛性和多样性俱佳的解集. 例如, MOEA/DVA<sup>[13]</sup> 通过控制变量分析将决策变量分成位置变量 (与多样性相关)、距离变量 (与收敛性相关) 和混合变量 (与收敛性和多样性均有关), 然后运用差分分组方法对距离变量进一步分组, 最后优化各子组. MOEA/DVA 不足之处在于: 它需要开销较多的计算资源评估目标函数, 使得算法优化问题解的计算资源相对不足; 此外, 现实中的 LSMOPs 通常含有大量的混合变量, MOEA/DVA 对混合变量采用了与多样性变量相同的优化策略, 致使其不能很好地处理混合变量较多的 LSMOPs. 针对 MOEA/DVA 的不足, LMEA<sup>[14]</sup> 采用聚类方法将 LSMOPs 的决策变量分成收敛性组和多样性组, 并运用不同的方法优化它们. 较之 MOEA/DVA, LMEA 将混合变量进一步划分成收敛性组和多样性组, 实验结果表明其有利于改善收敛性和多样性. 但也应指出, LMEA 中变量分解过程过于复杂且分组效果并不稳定.

(2) 降维的方法. LSMOEAs 对决策空间降维实质是通过缩短解个体产生后代, 而后代可在原决策空间中复原和评估. 亦即, 算法只需在降维后的决策空间寻优, 从而缩小了搜索范围. 代表性的方法包括问题转化、问题重定义、缩小决策变量范围和降维等. ① 问题转化. Zille 等人<sup>[7]</sup> 提出一种加权优化框架 (Weighted Optimization Framework, WOF), 该框架先将决策变量分组, 然后每组变量关联一个权重, 亦即同组变量具有相同权重. 如此便将对大规模决策变量的优化转化成对较低维度的权重向量的优化, 实现了对搜索空间降维. 但需指出, 一些 LSMOPs 的全局最优解可能是不同决策变量对应不同的权重值, 鉴于此, WOF 可能会丢失全局最

优解. 另外, WOF 在转化策略上也比较依赖变量分组技术. 梁等人<sup>[8]</sup> 提出基于存档和权值扩展的大规模多目标优化算法 LSMOEA-AWE. 该算法基于大规模决策变量与小规模权值变量之间的问题转化实现求解. 实验表明了该算法具有较好的性能; ② 问题重定义. 为提高 LSMOEA 的效率, LSMOF<sup>[23]</sup> 为每个解定义两个权重变量, 促使解个体在两个方向搜索较优解. 但根据 KKT 条件, 一个具有  $m$  个目标的 MOP, 其 Pareto 解集是  $(m-1)$  维分段连续的流形. 因此对于具有  $d$  维决策空间的 LSMOPs, 由于  $m \ll d$ , 使得 LSMOF 难以与  $(m-1)$  维的 Pareto 解集相交. 另外, 实践中选取合适的转化或重构函数亦存在困难; ③ 缩减决策变量范围. Zou 等人<sup>[24]</sup> 为有效求解 LSMOPs 提出一种模糊决策变量框架 FDV (Fuzzy Decision Variables). 实验表明 FDV 方法可显著改善一些 MOEA 算法的性能. 但不同的 LSMOPs 需要确定相应的最优参数值, 使用不便; ④ 降维技术. 通过计算决策变量相关性实现对决策空间降维. 例如 ReMO<sup>[25]</sup> 运用随机嵌入技术求解仅有少数变量对目标函数有贡献的 LSMOPs (即低有效维度问题), 效果明显. 此外, 由于机器学习具有强大的学习能力, 一些利用机器学习实现降维的方法也不断产生, 如基于神经网络的维度压缩<sup>[9]</sup>、基于模式挖掘的降维方法<sup>[10]</sup>等.

(3) 基于学习的方法. 这类方法不再将大规模决策变量分组或降维, 它运用新的变化算子产生后代, 或利用概率模型等产生后代. 代表性方法包括 MOEA/D-IFM<sup>[26]</sup>、LMOCSSO<sup>[11]</sup>、SparseEA<sup>[27]</sup>、S<sup>3</sup>-CMA-ES<sup>[28]</sup>等. 实验表明, 新型变化算子能在高维决策空间较好地平衡勘探与开采能力, 且能加快收敛速度; 另外, 基于概率模型的方法能较好地逼近 Pareto 解集. 相较于传统的进化算法, 基于学习的方法在一定程度上能增强算法在决策空间搜索的效率, 但在高维决策空间其搜索效率仍需提高.

### 3 LSMOEA/HS 算法

#### 3.1 黄金分层分组方法

为检测 LSMOP 各决策变量的控制属性, 一些研究者对决策变量随机采样一定次数, 然后根据对应目标空间的分布判断变量的控制属性从而实施分组. 具体地, 令  $x_i$  为大规模决策向量  $\mathbf{x} (\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d))$  中任一变量, 在  $x_i$  取值范围内对其随机采样一定次数而保持其他变量值不变. 通过考察抽样解在目标空间分布情况判断变量的控制属性. 迄

今,一些算法利用不同的准则判断变量的控制属性.例如,MOEA/DVA<sup>[13]</sup>考察抽样解在目标空间中非支配分层情况,如果分层后的最大非支配层  $F_{\max}$  等于 1,则变量为多样性变量;若  $F_{\max}$  等于抽样次数,则变量为收敛性变量;否则变量为混合变量.但需指出,现实中 LSMOPs 高度复杂,其决策变量一般较难满足 MOEA/DVA 的准则,也就是说,LSMOPs 将有大量的决策变量被划入混合变量组.而且 MOEA/DVA 对混合变量采用与多样性变量相同的优化策略,忽视了混合变量对收敛性的影响,其在一定程度上影响了算法性能.

图 1 以 UF1 函数<sup>[29]</sup>为例,对变量  $x_1$  在其取值范围内随机抽样 10 次,然后对抽样解在目标空间执行非支配分层,分层后获得的最大非支配层  $F_{\max} = 6$ .按照 MOEA/DVA 的准则, $x_1$  判为混合变量.但不难发现, $x_1$  对收敛性影响更大,若将其视为收敛性变量将更利于改善算法性能.进一步地,如果能根据抽样解在目标空间分布而将混合变量划分成收敛性变量或多样性变量,则不仅能简化分组过程而且利于改善算法性能.

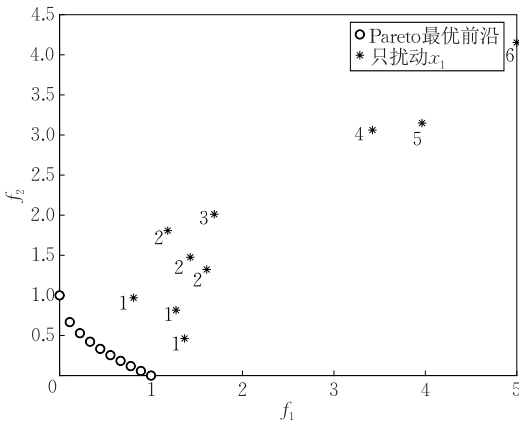


图 1 在 UF1 中对变量  $x_1$  随机抽样后划分非支配层

鉴于此,这里引入黄金分割点,提出一种黄金分层分组方法,其将大规模决策变量分成收敛性组和多样性组.具体地,设对变量  $x_i$  随机抽样  $ND$  次,抽样解在目标空间形成的最大非支配层为  $F_{\max}$ ,以黄金分割点  $G$  (近似于 0.618) 为阈值,若  $\lfloor ND \cdot G \rfloor < F_{\max}$ ,则  $x_i$  判为收敛性变量;否则判为多样性变量.近年来黄金比例方法已广泛应用于各种复杂系统的优化中并取得了良好的效果<sup>[30]</sup>,受此启发,这里将黄金分割点作为变量分组的阈值.另外,本文的参数实验也表明采用黄金分割点具有显著较优的效果.

图 2 以 WFG7 函数<sup>[31]</sup>为例解释黄金分层分组方法.对 WFG7 函数的  $x_9$  和  $x_{10}$  随机抽样 10 次,根据对应目标空间非支配分层的结果, $x_9$  相应的最大

非支配层  $F_{\max}$  为 4 ( $< \lfloor 10 \cdot 0.618 \rfloor$ ),  $x_{10}$  相应的最大非支配层  $F_{\max}$  为 7 ( $> \lfloor 10 \cdot 0.618 \rfloor$ ).根据黄金分层分组方法, $x_9$  判定为多样性变量, $x_{10}$  判定为收敛性变量.实际上,图 2 也直观地反映出优化  $x_9$  可促使解个体朝着多样性方向进化,而优化  $x_{10}$  可促使解个体朝着收敛性方向进化.

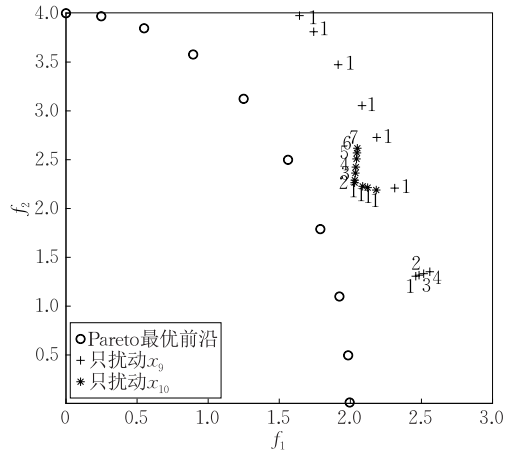


图 2 在 WFG7 中变量对  $x_9$  和  $x_{10}$  随机抽样并划分非支配层

算法 1 给出利用黄金分层分组方法划分大规模决策变量的流程.第 1 步初始化收敛性集合和多样性集合为空;第 2 至第 11 步进入循环阶段.第 3 步在当前种群中随机选择解个体  $p$ ;第 4 步对  $p$  的当前变量随机抽样  $ND$  次,产生子种群  $SP$ ;第 5 步利用 T-ENS 非支配排序方法<sup>[14]</sup>在目标空间对  $SP$  执行非支配分层,如  $\{1, 2, \dots, F_{\max}\}$ .如果  $F_{\max}$  大于  $\lfloor ND \cdot G \rfloor$ ,则当前变量为收敛性变量;否则,判其为多样性变量(第 6 至第 10 步).如此反复,直至全部的  $d$  维变量判定完毕.最后输出  $CV$  和  $DV$  (第 12 步).

#### 算法 1. 黄金分层分组方法 *golden\_group*.

输入:  $d$ : LSMOP 决策变量数目,  $ND$ : 对变量扰动的次数,  $G$ : 黄金分割点, 当前种群  $P$

输出: 收敛性集合  $CV$ , 多样性集合  $DV$

1. 初始化:  $CV = \emptyset, DV = \emptyset$ ;
2. FOR  $i = 1$  TO  $d$
3.     在当前种群  $P$  中随机选择解个体  $p$ ;
4.     对解  $p$  的第  $i$  维变量  $x_i$  随机抽样  $ND$  次,产生一个抽样子群  $SP_i$ ;
5.     对  $SP_i$  执行 T-ENS 非支配排序,产生非支配层  $\{1, 2, \dots, F_{\max}\}$ ;
6.     IF ( $F_{\max} > \lfloor ND \cdot G \rfloor$ )
7.          $CV = CV \cup \{x_i\}$ ;
8.     ELSE
9.          $DV = DV \cup \{x_i\}$ ;
10.     END IF
11. END FOR
12. 输出  $CV$  和  $DV$ .

黄金分层分组方法将大规模决策变量分成收敛性组和多样性组,避免了出现混合变量组。另外,与 LMEA 采用聚类方法分组相比,黄金分层分组方法更简洁。

### 3.2 基于组的变量相关性检测方法

大规模决策变量经黄金分层分组后被划分成收敛性组和多样性组。但现实中 LSMOPs 的收敛性变量通常远多于多样性变量。也就是说,分组后的收敛性变量仍可能是大规模的,其优化难度仍难以降低。其次,收敛性组中变量可能存在交互性,如果将交互变量分在同组内优化,则利于搜索问题最优解。最后,对大规模变量进行交互性分析需耗费大量的计算资源,使得用于优化问题解的计算资源相对不足。有鉴于此,提出一种基于组的变量相关性检测方法,利用其将收敛性组中具有交互关系的变量分至相同子组,然后再对子组进行优化。这种检测方法的特点是:(1)以变量组为单元进行检测;(2)若当前变量与某变量组均值之间的相关系数低于某一阈值,则忽略对该组所有变量的交互分析,节省大量计算开销。显然,阈值的选取对检测方法的准确性十分重要。Hemphill<sup>[32]</sup>研究表明,相关系数  $r$  的绝对值在 0.8 以上,一般认为变量间具有强相关性;相关系数  $r$  的绝对值在 0.3 到 0.8 之间,认为变量间有弱相关性;相关系数  $r$  的绝对值在 0.3 以下,认为变量间无相关性。这里采用该研究成果将相关系数的阈值设为 0.3。

算法 2 给出了基于组的变量相关性检测方法的流程。第 1 步从折半分组池中随机选取分组数  $R$ ,将  $CV$  划分成  $R$  个规模大致相当的子组;第 2 至第 11 步为双重循环阶段。第 4 步计算当前变量  $x_i$  与子组  $SG_j$  均值之间的相关系数  $r_{ij}$ ;第 5 步利用  $p$  值判断法进行相关系数显著性检验。算法采用  $p < 0.05$  的条件表明在 95% 的置信水平上接受假设  $x_i$  与子组  $SG_j$  均值之间具有相关性,且较显著;第 6 至第 8 步,如果  $p < 0.05$  且  $|r_{ij}| > 0.3$ ,则判定  $x_i$  与  $SG_j$  具有相关性,进而检测  $x_i$  与  $SG_j$  中各变量间的交互性并更新  $results$ ;否则,终止当前循环,检测下一子组。算法最后输出变量交互结果  $results$ 。

**算法 2.** 基于组的变量交互检测方法 *interaction\_test\_based\_group*.

输入:当前种群  $P$ ,收敛性集合  $CV$

输出:变量交互结果  $results$

1. 从分组池  $\{2, 4, \dots, \lfloor \log_2 |CV| \rfloor\}$  中随机选取分组数  $R$ ,将  $CV$  划分成规模大致相当的  $R$  个子组  $SG_1, SG_2, \dots, SG_R$ ;

2. FOR  $i=1$  TO  $|CV|$
3. FOR  $j=1$  TO  $R$
4. 计算变量  $x_i$  与子组  $SG_j$  的均值  $\bar{x}_j$  之间的相关系数  $r_{ij}$ ;
5. 利用  $r_{ij}$  进行显著性检验,计算  $p$  值;
6. IF ( $p < 0.05$  &  $|r_{ij}| > 0.3$ )
7. 利用文献[13]中变量交互分析方法检查当前变量  $x_i$  与  $SG_j$  中各变量之间的交互性,更新  $results$ ;
8. ELSE continue;
9. END IF
10. END FOR
11. END FOR
12. 输出  $results$ .

### 3.3 利用变量交互对收敛性变量分组

利用算法 2 获得的变量交互结果将  $CV$  中的变量划分成不同子组,如此便可将困难的 LSMOPs 转化成若干具有低维子组的优化问题。另外,由于 LSMOPs 需要同时优化各目标函数,因此变量分组时需要考虑变量对应不同目标函数的关系。这里利用文献[13]的方法,将变量交互综合成变量关联图,在关联图中找出所有的极大连通子图,实现将交互变量分至相同子组。

图 3 以 3-目标的 MOP 为例,示意了利用极大连通子图划分子组。其中符号“—”表示变量之间具有交互性。不难发现,图 3 存在三个子组,即  $\{x_3, x_5, x_8, x_9\}$ ,  $\{x_4, x_6, x_7\}$  和  $\{x_{10}\}$ 。由于  $x_1$  和  $x_2$  是多样性变量,因此它们不属于任何子组。当对各收敛性子组

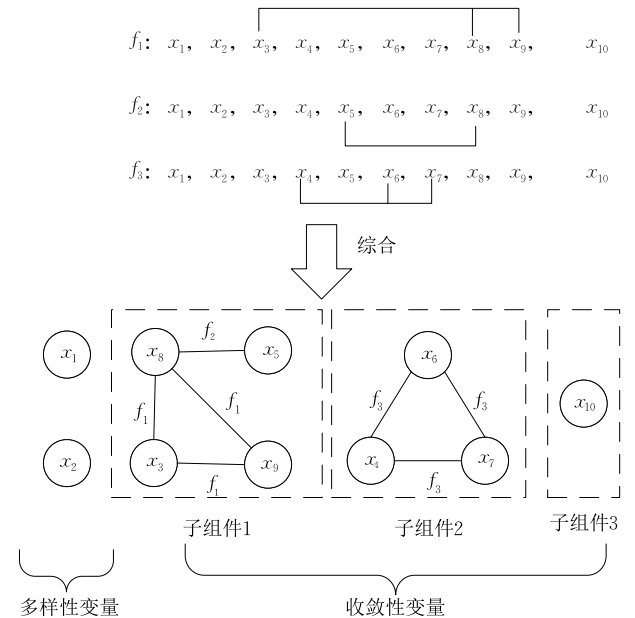


图 3 以 3-目标的 MOP 为例,利用变量交互结果构建极大连通子图实现子组划分的示意图

进行优化时,  $x_1$  和  $x_2$  的值保持不变. 由于  $x_4$  和  $x_5$  属于不同的极大连通子图, 因此它们分属不同子组.  $x_5$  和  $x_9$  属于相同子组是因为它们在同一极大连通子图上, 即  $x_9 \xrightarrow{f_1} x_3 \xrightarrow{f_1} x_8 \xrightarrow{f_2} x_5$ .

算法 3 给出了利用变量交互结果对收敛性变量实施分组的过程. 第 1 步从算法 2 的运行结果中获得变量交互结果; 第 2 步根据变量交互构建极大连通子图, 并利用子图对收敛性变量进行划分.

**算法 3.** 利用变量交互结果对收敛性变量分组 *DivideSubGroup\_based\_interaction*.

输入: LSMOP 目标数  $m$ , 收敛性变量集  $CV$ , 当前种群  $P$

输出: 收敛性变量子组 *subgroups*

1. 从算法 2 获得收敛性变量集  $CV$  中各变量的交互结果;
2. 利用变量交互结果构建收敛性变量关联图;
3. 在关联图中搜索极大连通子图, 将  $CV$  中的变量分成不同子组 *subgroups*;
4. 输出 *subgroups*.

不难发现, 极大连通子图保证了子组内变量具有最大程度的交互, 子组间保持最小程度的交互. 另外, 与 SOP 相比, MOP 决策变量对应各目标函数的关系通常是不相同的, 极大连通子图总体上可刻画大规模决策变量间的交互关系.

### 3.4 优化收敛性子组

算法 4 以收敛性子组为单元, 利用 DE 方法依次优化各子组. 第 1 步初始化下一代种群  $Q$  为空; 第 2 步对当前种群  $P$  实施 T-ENS 排序分层; 第 3 步在目标空间中计算  $P$  中各点到原点的欧氏距离; 第 4 至第 10 步的循环体执行对各收敛性子组的优化. 其中第 5 步利用 DE/rand/1 方法优化当前子组  $subgroup_i$ , 以获得规模为  $|P|$  的子代种群  $O_i$ ; 第 6 步将种群  $P$  和  $O_i$  合并, 然后采用 T-ENS 排序<sup>[14]</sup>对合并种群分层; 第 7 步计算合并种群的个体离原点的欧氏距离; 第 8 步以非支配等级和距离为主要和辅助准则实施环境选择, 用  $O_i$  中胜出个体代替  $P$  中个体, 并维持种群规模不变; 第 10 步更新下一代种群  $Q$ , 并输出之.

算法 4 的第 5 步利用 DE 生成后代, 其原因在于: 首先, DE 早期能在较大范围内搜索, 具有较强的全局优化能力; 后期在个体的附近搜索, 具有较强的局部开采能力. 这些特点契合了 LSMOEAs 搜索问题最优解的要求. 其次, DE 结构简单、控制参数少且易于实现. 最后, DE 利用了种群的局部信息和全局信息, 将群体搜索与协同搜索结合以指导算法

搜索, 具有较高的性能.

**算法 4.** 优化收敛性变量子组 *optimization\_convergence\_subgroups*.

输入: 当前种群  $P$ , 收敛性子组 *subgroups*

输出: 下一代种群  $Q$

1. 初始化下一代种群  $Q$  为空;
2. 对当前种群  $P$  进行 T-ENS 排序分层;
3. 在目标空间计算种群  $P$  中各点到原点的欧氏距离;
4. FOR  $i=1$  TO  $|subgroups|$
5. 利用 DE/rand/1 方法产生关联收敛性子组 *subgroups*[ $i$ ] 中变量且规模为  $|P|$  子代种群  $O_i$ ;
6. 将种群  $P$  和  $O_i$  合并, 进行 T-ENS 排序分层;
7. 计算合并后种群中各个体离原点的欧氏距离;
8. 以非支配等级和距离为准则, 用  $O_i$  中的解替代  $P$  中的解;
9. END FOR
10.  $Q=P$ , 输出  $Q$ .

### 3.5 优化多样性变量组

算法 5 将多样性变量组视为整体进行优化. 其流程如下: 第 1 步初始化下一代种群  $Q$  为空; 第 2 步利用 DE/rand/1 算法产生关联  $DV$  中变量的子种群  $O$ ; 第 3 步将种群  $P$  和  $O$  合并, 然后利用 T-ENS 排序方法将合并后的种群分层; 第 4 步当前  $(k-1)$  个非支配层中所有个体的数目小于  $|P|$  且前  $k$  个非支配层全部个体的数目大于  $|P|$  时, 选择将前  $(k-1)$  个非支配层上的个体悉数加入种群  $Q$ ; 第 5 步当种群  $Q$  为空, 首先选择将  $F_k$  层上的极端解加入  $Q$ , 然后更新  $F_k$ ; 第 6 步在目标空间计算合并种群  $Q \cup F_k$  中任意两个解之间的角度; 第 7 至第 10 步依次从  $F_k$  中选择与  $Q$  中个体具有最大的最小夹角的个体加入  $Q$ , 直至  $Q$  的规模达到  $|P|$  为止. 最后, 输出下一代种群  $Q$ .

**算法 5.** 优化多样性变量集 *optimization\_diversity\_set*.

输入: 当前种群  $P$ , 多样性变量集  $DV$

输出: 下一代种群  $Q$

1. 初始化下一代种群  $Q$  为空;
2. 利用 DE/rand/1 方法产生关联  $DV$  中变量且规模为  $|P|$  子代种群  $O$ ;
3. 将种群  $P$  和  $O$  合并, 利用 T-ENS 排序对合并后的种群分层, 获得非支配层  $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ ;
4. 将前  $(k-1)$  个非支配层上的个体加入  $Q$ . 这里  $k$  是满足  $|F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_k| > |P|$  的最小值;
5. 如果  $Q$  为空, 选择将  $F_k$  中极端解加入  $Q$ , 且  $F_k = F_k/Q$ ;
6. 在目标空间计算合并种群  $Q \cup F_k$  中任意两个解之

间的角度;

7. WHILE  $|Q| < |P|$
8.  $p \leftarrow \arg \max_{x \in F_k} \min_{y \in Q} [x][y];$
9.  $Q \leftarrow Q \cup \{p\};$
10. END WHILE
11. 输出下一代种群  $Q$ .

算法 5 的第 5 步选择将  $F_k$  的极端解加入下一代种群,其目的在于增强种群的多样性.另外,在算法 4 和 5 中都用到了非支配排序方法对种群进行分层,因此非支配排序方法的计算效率会直接影响到算法的效率.虽然已有多种不同的非支配方法,但它们的时间复杂度大多高达  $O(MN^2)$  ( $M$  为目标数目,  $N$  为种群规模),而 T-ENS 排序方法的时间复杂度仅为  $O(MN \log N / \log M)^{[14]}$ , 计算效率较高.因此,本文利用 T-ENS 排序方法实施分层以提高算法的效率.

### 3.6 LSMOEA/HS 主要框架

在前述 3.1 至 3.5 小节基础上,算法 6 给出了 LSMOEA/HS 主要框架.第 1 步初始化规模为  $N$  的种群  $P$ ;第 2 步利用黄金分层分组方法将大规模决策变量划分成收敛性变量集  $CV$  和多样性变量集  $DV$ ;第 3 步对  $CV$  执行基于组的变量交互性检测,获得收敛性变量交互结果  $results$ ;第 4 步根据  $results$ ,利用算法 3 将  $CV$  中的变量划分成不同子组;第 5 步利用算法 4 优化各收敛性子组;第 6 步利用算法 5 优化多样性变量集.最后输出算法获得的最终种群  $P$ .

#### 算法 6. LSMOEA/HS 主要框架.

输入: 种群规模  $N$ , 大规模决策变量数目  $d$ , 目标函数的数目  $m$ , 对变量随机抽样次数  $ND$ , 黄金分割点  $G$   
输出: 最终解群  $P$

1. 初始化规模为  $N$  的种群  $P$ ;
2. 利用算法 1 的黄金分层分组方法划分大规模变量:  
 $[CV, DV] \leftarrow \text{golden\_group}(P, d, ND, G);$
3. 利用算法 2 对  $CV$  执行基于组的变量交互检测:  
 $results \leftarrow \text{interaction\_test\_based\_group}(P, CV);$
4. 根据  $results$ , 利用算法 3 划分子组:  $[subgroups] \leftarrow \text{DivideSubGroup\_based\_interaction}(P, m, CV);$
5. 利用算法 4 优化各收敛性子组:  
 $P \leftarrow \text{optimization\_convergence\_subgroups}(P, subgroups);$
6. 利用算法 5 优化多样性变量集:  
 $P \leftarrow \text{optimization\_diversity\_set}(P, DV);$
7. 输出最终解群  $P$ .

LSMOEA/HS 时间复杂度分析如下: 设  $N$  表示种群规模,  $m$  表示 LSMOP 的目标数,  $ND$  表示对某变量扰动的次数, 决策空间维度为  $d$ . 第 1 步初始化种群的时间复杂度为  $O(Nd)$ ; 第 2 步利用黄金分层分组方法划分大规模决策变量所需时间为  $O(dmND \log ND / \log m)$ ; 第 3 步基于组的变量交互

检测的时间复杂度为  $O(|CV| \log_2 |CV|)$ ; 第 4 步利用第 3 步获得的变量交互信息对收敛性变量分组的时间复杂度为  $O(|CV|)$ ; 第 5 步优化各收敛子组的时间复杂度取决于利用 DE/rand/1 方法获得子代种群, 时间复杂度为  $O(N |subgroups| |CV|)$ ; 第 6 步优化多样性变量集合的时间复杂度同样取决于利用 DE/rand/1 方法获得子代种群, 其时间复杂度为  $O(N |DV|)$ ; 第 7 步输出最终解群需要的时间复杂度为  $O(Nm)$ . 综上, LSMOEA/HS 时间复杂度为  $O(Nd) + O(dmND \log ND / \log m) + O(|CV| \log_2 |CV|) + O(|CV|) + O(N |subgroups| |CV|) + O(N |DV|) + O(Nm) = O(|CV| \log_2 |CV|)$ .

不难看出, LSMOEA/HS 时间复杂度取决于其所采用的变量分组方法. 这也说明了设计高效的变量分组方法对基于变量分组的 LSMOEA 效率提升至至关重要.

## 4 实验与分析

### 4.1 对比算法

为验证 LSMOEA/HS 的性能, 这里选取近年发展的 5 种大规模多目标进化算法 MOEA/DVA<sup>[13]</sup>、LMEA<sup>[14]</sup>、LMOCSO<sup>[11]</sup>、LMOEA-DS<sup>[15]</sup> 和 IM-MOEA/D<sup>[16]</sup> 为对比算法以测验本文算法性能. 选取的原因在于: (1) MOEA/DVA 通过对变量实施扰动将变量分为收敛性组、多样性组和混合组, 然后利用不同的方法优化收敛性子组和多样性变量 (包括混合变量), 它是较早利用变量分析方法求解 LSMOPs 的算法. 而 LSMOEA/HS 在变量划分策略和不同类型变量的优化策略上与 MOEA/DVA 有某些相似之处; (2) LMEA 利用聚类方法将变量分成收敛性组和多样性组, 然后分别采用不同的策略进行优化. LSMOEA/HS 与 LMEA 具有相似的算法框架, 二者具有可比性; (3) LMOCSO 是新近发展的一种利用竞争粒子群算法求解 LSMOPs 的代表性算法, 其采用两阶段策略更新粒子位置能显著改善搜索效率, 算法高效; (4) LMOEA-DS 亦为新近发展的一种高效的 LSMOEA, 其利用多种不同算子或策略协同优化和求解, 这与 LSMOEA/HS 使用混合策略求解 LSMOPs 具有相似之处; (5) IM-MOEA/D 作为一类基于学习的 LSMOEA 的代表参与算法性能的比较.

### 4.2 测试函数

为检验 LSMOEA/HS 的性能, 选取 2-目标和 3-目标的 LSMOP1 ~ LSMOP9 基准问题测试算法



的性能. 究其原因: LSMOP 测试集是专门为研究大规模多目标优化问题设计的一系列测试函数, 它们能刻画现实 LSMOPs 可能存在的一些难度特征, 如变量分组不均、变量与不同目标函数具有不同的相关性, 特别是位置变量与距离变量之间存在链接关系等. 上述特征使得 LSMOP 测试集相比其它的测试集具有更大的挑战性. 表 1 列出了 LSMOP 测试集中各函数的 Pareto 前沿、适应度地势和目标函数可分性等特征.

表 1 基准 LSMOP 测试集中各函数的特征

测试函数	Pareto 前沿特征	适应度地势特征	目标函数的可分性
LSMOP1	线性	单模态	可分
LSMOP2	线性	混合	部分可分
LSMOP3	线性	多模态	混合
LSMOP4	线性	混合	混合
LSMOP5	凹型	单模态	可分
LSMOP6	凹型	混合	部分可分
LSMOP7	凹型	多模态	混合
LSMOP8	凹型	混合	混合
LSMOP9	不连贯	混合	可分

### 4.3 性能指标

为评估算法性能, 这里采用超体积指标  $HV$  (Hypervolume) 和反转世代距离  $IGD$  (Inverted Generational Distance) 两个常用的指标. 其原因在于,  $HV$  和  $IGD$  均能同时度量近似解集的收敛性和多样性.

$HV$  指标通过计算目标空间中非劣解集覆盖区域的大小来评估算法的性能.  $HV$  指标也称为 Lebesgue 测度, 它在理论上具有良好的数学性质, 即在所有的一元指标中,  $HV$  是一种能够判定非支配解集  $X$  不比另一个非支配解集  $Y$  要差的方法, 而且它能与 Pareto 支配保持一致. 对于一个近似 Pareto 解集  $A$  而言, 其  $HV$  值计算如下:

$$HV = \Lambda \left( \bigcup_{p \in A} \{x | p \succ x \succ x_{ref}\} \right) \quad (2)$$

式(2)中,  $\Lambda$  为 Lebesgue 测度,  $x_{ref}$  为参照点. 对于 2-目标问题,  $HV$  是坐标区域的面积; 对于 3-目标问题,  $HV$  是三维空间构成的体积. 通常,  $HV$  值越大, 表示解集的质量越高, 亦即解集的收敛性与多样性就越好.

$IGD$  指标度量了真实 Pareto 前沿到所获近似 Pareto 解集之间的距离. 由于实验中测试问题的真实 PF 是已知的, 通过在真实 PF 上均匀采集多样性的解点, 计算这些采样点到算法获得的近似 Pareto 解集之间的距离则既能反映解集的收敛性又能反映多样性. 一般而言,  $IGD$  指标值越小, 表示近似解集的收敛性和多样性越好. 假设  $P$  是测试问题真实

PF 的代表性解集,  $A$  是算法获得的近似 Pareto 解集,  $IGD$  指标可利用式(3)进行计算:

$$IGD(A, P) = \frac{1}{|P|} \sum_{i=1}^{|P|} Dist_i \quad (3)$$

式(3)中,  $Dist_i = \min_{j=1}^{|A|} \sqrt{\sum_{k=1}^m \left( \frac{f_k(p_i) - f_k(a_j)}{f_k^{\max} - f_k^{\min}} \right)^2}$  为归一化后的最小欧氏距离;  $f_k^{\max}$  和  $f_k^{\min}$  分别表示集合  $P$  在第  $k$  个目标上获得的最大值和最小值;  $p_i \in P, i = 1, 2, \dots, |P|$ ;  $a_j \in A, j = 1, 2, \dots, |A|$ . 实验中对各测试实例采样 10 000 个均匀分布的 Pareto 解点作为真实 Pareto 前沿的代表计算  $IGD$  值.

### 4.4 算法参数

实验部分所涉及的参数包括各算法共有参数和特有参数, 具体如下:

(1) 共有参数. 为公平比较起见, 不同算法在相同测试实例上执行相同的函数评估次数  $FE$  (Function Evaluation). 各算法在不同测试实例上执行的代数 ( $T$ ) 取决于评估次数和种群规模 ( $N$ ), 且满足  $T = FE/N$ . 对于决策变量维度为 200、500、1000、2000、5000 的测试实例, 实验设定的  $FE$  分别为 500 000、1 000 000、2 000 000、4 000 000 和 10 000 000. 另外, 由于 LMOCSO、LMOEA-DS 和 IM-MOEA/D 算法均利用两层生成方法产生一定数目的权重向量, 因此它们的种群规模需与权重向量保持一致. 鉴于此, 这里对各算法在求解 2-目标和 3-目标的 LSMOPs 时的种群规模统一设置为 92. 各算法子代生成过程中所用到的交叉算子 SBX 变异算子 PM 和差分进化算子 DE 的参数设置如表 2 所示.

表 2 子代生成算子参数设置

参数名	参数值
SBX 交叉的概率 ( $p_c$ )	1.0
SBX 交叉的分布指数 ( $\eta_c$ )	20
PM 的变异概率 ( $p_m$ )	$1/d$ ( $d$ 为决策变量数目)
PM 的分布指数 ( $\eta_m$ )	20
DE 交叉概率 ( $CR$ )	1
缩放因子 ( $F$ )	0.5

(2) 特有参数. 各对比算法特有的参数按其原始文献的建议值设置. 比如, 在 MOEA/DVA 中, 算法的扰动次数  $NCA = 20$ , 变量分析采样数  $NIA = 6$ ; LMEA 算法采样的个体数  $nSel = 2$ , 扰动次数  $nPer = 4$ , 变量分析采样数  $nCor = 6$ ; LMOCSO 算法中 APD 的惩罚参数  $\alpha$  取值为 2; LMOEA-DS 算法中每个搜索方向随机生成解的个数取值为 30, 聚类个数为  $M + 10$ . IM-MOEA/D 算法中参考向量的个数  $K = 10$ , 模型数量  $L = 3$ . LSMOEA/HS 对变量随机抽样的次数  $ND$  设为 20.

## 4.5 统计方法

为减少随机因素对性能评估的影响,实验中各算法在每个测试实例中均独立执行 30 次(每次使用不同的随机数种子)以获得  $IGD$  和  $HV$  指标的均值和方差. 另外,实验利用显著水平为 0.05 的 Wilcoxon 秩和检验来分析各算法获得近似解集的性能在统计意义上的差异. 符号“+”、“-”和“=”分别表示对比算法的  $IGD$  值或  $HV$  值明显优于、劣于和无差别于 LSMOEA/HS.

## 4.6 实验环境

本文所有实验均在 ASUS FL5600L PC 上执行,PC 配置如下:(1)CPU:AMD A10-8700P;(2)1.8GHz 主频;(3)8.0GB 内存;(4)Windows 7 X64 位操作系统. 另外,所有算法均在 PlatEMO 平台<sup>[33]</sup>上实现.

## 4.7 实验结果与分析

**实验 1.** 为验证黄金分层分组采用黄金分割点(比例)之有效性,设计如下实验方案:根据文献[13]

的研究,从目前广泛使用的 MOP 基准测试集中选取一些含混合变量较多的函数,如 DTLZ7、UF3、UF4、UF6 和 WFG7 等. 对这些函数的变量随机抽样 200 次(即  $ND=200$ ). 根据对应目标空间非支配排序结果,设获得最大非支配层为  $F_{\max}$ . 实验 1 分别检验黄金分层分组中当  $F_{\max}$  大于 0.2 倍  $ND$  的下界、0.4 倍  $ND$  的下界、 $G$  倍  $ND$  的下界( $G \approx 0.618$ )、0.8 倍  $ND$  的下界以及  $F_{\max}$  等于  $ND$  时这 5 种情形,然后将它们所对应的分层分组方法分别嵌入到 LSMOEA/HS 以代替算法 6 中第 2 步黄金分层分组方法,且保持算法其他步骤和执行参数不变. 为表示方便,这里将上述方案所构造出的 LSMOEA/HS 变种分别简记为 LSMOEA/HS(0.2)、LSMOEA/HS(0.4)、LSMOEA/HS( $G$ ) (即 LSMOEA/HS)、LSMOEA/HS(0.8) 和 LSMOEA/HS(1). 表 3 给出了五种算法在共计 25 个测试实例上获得的  $IGD$  指标的均值和方差.

表 3 五种算法在 25 个测试实例上获得的  $IGD$  均值与方差

测试问题	变量数目	LSMOEA/HS(0.2)	LSMOEA/HS(0.4)	LSMOEA/HS(0.8)	LSMOEA/HS(1)	LSMOEA/HS( $G$ )
3-目标 DTLZ7	200	2.1508e-1(1.50e-2)-	1.0245e-1(1.81e-2)-	1.0208e-1(1.21e-2)-	1.0754e-1(1.82e-2)-	<b>3.1609e-2(1.00e-3)</b>
	500	2.7148e-1(2.78e-2)-	7.4573e-1(3.48e-2)-	7.6905e-1(3.80e-2)-	8.2382e-1(3.13e-2)-	<b>1.0199e-1(4.67e-3)</b>
	1000	8.2390e-1(1.37e-2)-	8.9021e-1(2.74e-2)-	8.9071e-1(1.69e-2)-	8.9653e-1(2.05e-2)-	<b>1.5446e-1(6.14e-3)</b>
	2000	4.3026e-1(3.58e-4)-	4.7441e-1(1.62e-3)-	4.7135e-1(4.07e-3)-	4.6893e-1(2.63e-3)-	<b>2.8603e-2(2.12e-4)</b>
	5000	3.2048e-1(6.90e-2)-	3.8800e-1(2.85e-2)-	2.8331e-1(3.11e-1)=	7.6671e-1(2.71e-2)-	<b>1.3238e-1(1.97e-2)</b>
2-目标 UF3	200	1.3986e-1(1.89e-2)-	1.3875e-1(1.12e-2)-	4.5592e-2(2.18e-3)-	4.4260e-2(2.06e-3)-	<b>2.3392e-2(1.51e-3)</b>
	500	7.3210e-2(5.31e-3)-	7.3041e-2(4.03e-3)-	3.4949e-1(4.30e-2)-	3.3905e-1(4.47e-2)-	<b>3.8959e-2(1.11e-3)</b>
	1000	1.0203e-1(1.92e-2)-	1.1469e-1(2.34e-2)-	4.8793e-2(5.00e-4)-	4.9049e-2(6.99e-4)-	<b>1.2750e-2(2.06e-4)</b>
	2000	1.8150e-1(2.35e-2)-	1.6807e-1(5.58e-3)-	1.5935e-2(5.55e-5)-	2.5899e-1(3.00e-2)-	<b>1.5820e-2(3.47e-5)</b>
	5000	1.0746e-1(2.10e-2)-	1.3106e-1(2.04e-2)-	1.8083e-1(1.14e-2)-	2.0037e-1(1.44e-2)-	<b>2.8624e-2(2.11e-4)</b>
2-目标 UF4	200	4.1319e-2(1.52e-4)-	4.1462e-2(2.02e-4)-	4.1711e-2(2.45e-4)-	4.1658e-2(3.76e-4)-	<b>3.7955e-2(2.54e-4)</b>
	500	1.2348e-1(1.00e-3)-	2.7656e-1(3.52e-1)-	1.2301e-1(1.64e-3)-	1.2238e-1(1.81e-3)-	<b>3.6749e-2(1.21e-4)</b>
	1000	1.3957e-1(1.70e-2)-	1.6832e-1(1.76e-2)-	5.1726e-2(9.90e-5)-	1.9359e-1(1.12e-2)-	<b>5.1497e-2(1.52e-4)</b>
	2000	7.8122e-1(2.67e-2)-	3.7800e-2(2.52e-5)-	3.7803e-2(3.30e-6)-	3.7768e-2(4.27e-7)=	<b>3.7767e-2(4.87e-6)</b>
	5000	8.3546e-1(1.85e-1)-	9.0448e-1(3.82e-1)-	7.7990e-1(4.71e-2)-	7.8593e-1(5.61e-2)-	<b>2.8761e-2(6.97e-4)</b>
2-目标 UF6	200	4.2854e-1(4.35e-2)-	7.0943e-2(1.85e-3)-	7.0460e-2(1.01e-3)-	7.0527e-2(1.45e-3)-	<b>5.0153e-2(8.33e-4)</b>
	500	1.9815e-1(3.16e-2)-	7.7365e-1(1.56e-2)-	8.1936e-1(2.21e-2)-	8.3273e-1(2.79e-2)-	<b>6.6201e-2(1.58e-3)</b>
	1000	1.6261e-1(2.91e-3)-	1.6760e-1(3.90e-3)-	1.6709e-1(3.61e-3)-	1.6557e-1(3.05e-3)-	<b>9.4154e-2(1.02e-2)</b>
	2000	8.3459e-1(3.03e-2)-	1.2312e-1(1.15e-3)-	4.5303e-2(1.43e-4)-	4.5407e-2(2.44e-4)-	<b>4.4853e-2(1.32e-4)</b>
	5000	1.2222e-1(1.45e-3)-	1.2148e-1(1.79e-3)-	8.0211e-1(5.78e-2)-	8.1937e-1(1.04e-2)-	<b>1.5099e-2(6.19e-4)</b>
3-目标 WFG7	200	<b>2.4480e-2(3.25e-4)+</b>	2.7380e-1(4.89e-2)-	3.9826e-1(7.96e-2)-	3.1523e-1(6.74e-2)-	9.4954e-2(2.72e-2)
	500	<b>2.9474e-2(4.06e-5)+</b>	2.4072e-1(2.26e-2)-	5.0494e-1(9.68e-2)-	4.3638e-1(2.01e-1)-	1.2172e-1(2.83e-3)
	1000	2.9557e-2(7.86e-5)-	2.5018e-1(5.27e-2)-	5.4421e-1(8.41e-2)-	3.5636e-1(6.51e-2)-	<b>2.9389e-2(5.10e-5)</b>
	2000	2.3314e-1(4.47e-3)-	2.3364e-1(9.12e-4)-	3.6404e-1(1.39e-1)-	2.8729e-1(1.54e-2)-	<b>2.8922e-2(1.06e-4)</b>
	5000	8.6413e-1(3.27e-2)-	8.5986e-1(4.39e-2)-	8.2203e-1(1.41e-2)-	8.4484e-1(3.26e-2)-	<b>4.3882e-2(3.21e-3)</b>
+/-/=		2/23/0	0/25/0	0/24/1	0/24/1	-

表 3 给出了 LSMOEA/HS(0.2)、LSMOEA/HS(0.4)、LSMOEA/HS( $G$ )、LSMOEA/HS(0.8) 和 LSMOEA/HS(1) 这五种算法在 3-目标 DTLZ7、2-目标-UF3、2-目标-UF4、2-目标-UF6 和 3-目标 WFG7

测试问题共计 25 个测试实例上所获得的  $IGD$  均值与方差. 从各算法获得的最佳  $IGD$  均值的数目来看,LSMOEA/HS( $G$ )、LSMOEA/HS(0.2) 分别获得 23 个和 2 个,其余 3 种算法变种均未获得任何最佳的

IGD 均值. 另外,从表 3 的 Wilcoxon 秩和检验结果看 LSMOEA/HS(G) 相对于 LSMOEA/HS(0.2)、LSMOEA/HS(0.4)、LSMOEA/HS(0.8) 和 LSMOEA/HS(1) 而言,其获得的净胜分(得“+”与得“-”的测试实例个数之差,下同)分别为 21、25、24 和 24. 总体上,LSMOEA/HS(G) 的性能在含混合变量较多的函数上要极显著地优于其它四种对比算法,而仅在 200 和 500 维的 3-目标 WFG7 测试实例上要劣于 LSMOEA/HS(0.2). 究其原因,对于 200 和 500 维的 3-目标 WFG7 测试实例,LSMOEA/HS(0.2) 在进化早期即可获得分布均匀的解集,算法将多数混合变量判定为收敛性变量有利于改善算法的收敛性. 在上述因素共同作用下 LSMOEA/HS(0.2) 在这两个实例上的获得的性能要优于 LSMOEA/HS(G). 但随着决策变量数目增至 1000 和 5000 时,LSMOEA/HS(G) 算法表现出比其他算法更好的性能,表明在更大规模决策空间中黄金分割点(比例)能准确地对变量实施分组并能平衡算法的收敛性和多样性,使得算法能获得显著较优的性能. 综上,实验 1 表明采

用基于黄金分割点的分层分组方法是有效的.

**实验 2.** LSMOEA/HS 主要部件包括黄金分层分组和基于组的变量相关性检测两个核心部件. 为独立验证这两个策略的有效性,这里构造 3 个对比算法,分别命名为 LSMOEA、LSMOEA-G、LSMOEA-IT,构造方法如下:(1) LSMOEA 是在 LSMOEA/HS 中移除其中的黄金分层分组和基于组的相关性检测两个核心部件,取而代之将全部决策变量视为整体优化,不考虑变量交互,且保持算法其他部分不变;(2) LSMOEA-G 是在 LSMOEA/HS 中移除基于组的变量相关性检测部件,其他的部分保持不变;(3) LSMOEA-IT 是在 LSMOEA/HS 中移除黄金分层分组方法而其他的部分不变. 实验在 2-目标和 3-目标的 LSMOP 测试集共计 18 个实例上进行实验,各实例的决策变量数目设为 1000. 这里考察各算法在每个实例上独立运行 30 次获得的 IGD 均值和方差. 表 4 给出了 LSMOEA、LSMOEA-G、LSMOEA-IT 和 LSMOEA/HS 在 18 个 1000 维的 LSMOP 测试实例上获得的 IGD 均值和方差.

表 4 四种算法在 1000 维的 LSMOP 系列测试问题上获得的 IGD 均值和方差

测试问题	目标数目	LSMOEA	LSMOEA-G	LSMOEA-IT	LSMOEA/HS
LSMOP1	2	5.5069e-1(3.11e-1)-	3.8111e-1(6.48e-3)-	6.6646e-1(2.97e-2)-	<b>4.4735e-2(2.31e-3)</b>
	3	7.5447e-1(1.21e-2)-	8.9998e-1(1.05e-1)-	8.8043e-1(8.44e-1)-	<b>7.2269e-2(3.81e-3)</b>
LSMOP2	2	7.1514e-1(4.30e-4)-	3.6369e-2(4.16e-4)-	6.4030e-2(1.72e-2)-	<b>3.3742e-2(6.55e-4)</b>
	3	5.1902e-1(2.21e-2)-	<b>5.1698e-2(7.88e-4)+</b>	2.3529e-1(5.18e-2)-	5.8794e-2(2.18e-3)
LSMOP3	2	2.2198e+1(6.69e-1)-	2.4163e+0(1.45e+0)=	7.1582e+0(3.92e-1)-	<b>2.2868e+0(1.02e+0)</b>
	3	8.7002e+0(1.85e+0)-	1.0112e+1(1.68e+0)-	3.6542e+0(1.34e-1)-	<b>1.3616e+0(8.41e-2)</b>
LSMOP4	2	7.1629e-1(9.40e-4)-	4.9167e-2(6.14e-4)-	5.6857e-2(1.19e-2)-	<b>1.5439e-2(5.98e-4)</b>
	3	8.6444e-1(9.33e-3)-	9.2199e-2(1.16e-3)-	1.3897e-1(1.18e-2)-	<b>6.1202e-2(3.75e-3)</b>
LSMOP5	2	1.2664e+0(1.06e+0)-	5.7773e-1(1.77e-2)-	1.4150e+0(9.46e-2)-	<b>1.2691e-1(1.10e-2)</b>
	3	9.7671e-1(1.80e-2)-	1.8208e+0(4.91e-1)-	1.2595e+0(7.55e-2)-	<b>2.0303e-1(1.68e-2)</b>
LSMOP6	2	7.5208e-1(2.65e-4)-	4.5252e-1(3.47e-2)=	7.7151e-1(2.85e-4)-	<b>4.5103e-1(1.01e-2)</b>
	3	3.3703e+2(9.30e+1)-	3.3229e+1(2.41e+1)-	<b>3.8728e+0(4.57e-1)+</b>	5.3326e+0(3.42e-1)
LSMOP7	2	5.0796e+1(4.35e+0)-	<b>1.7815e+0(1.72e-1)+</b>	1.4279e+3(2.23e+2)-	1.2399e+1(2.04e+0)
	3	1.0491e+0(5.72e-3)-	1.1022e+0(4.69e-3)-	1.0040e+0(2.67e-3)-	<b>7.6855e-1(1.52e-1)</b>
LSMOP8	2	6.6422e-1(1.56e-2)-	3.3021e-1(4.30e-2)-	1.2050e+0(8.93e-2)-	<b>6.6075e-2(3.96e-3)</b>
	3	9.5119e-1(5.51e-4)-	9.5684e-1(1.63e-4)-	5.9382e-1(1.78e-2)-	<b>1.3889e-1(1.02e-2)</b>
LSMOP9	2	9.3415e-1(9.92e-3)-	3.3603e-1(6.43e-2)-	1.6115e+0(3.23e-1)-	<b>1.1464e-1(2.08e-2)</b>
	3	1.2893e+0(6.63e-1)-	6.9686e+0(5.23e+0)-	5.7279e+0(8.70e-1)-	<b>2.8406e-1(2.75e-2)</b>
+/-/=		0/18/0	2/14/2	1/17/0	-

从表 4 可知,在全部 18 个测试实例上 LSMOEA/HS、LSMOEA-G、LSMOEA-IT 和 LSMOEA 获得最佳的 IGD 均值分别为 15、2、1、0. 另外,从表 4 的 Wilcoxon 秩和检验结果来看,LSMOEA/HS 相对于 LSMOEA-G、LSMOEA-IT、LSMOEA 的净胜分分别为 12、16 和 18. 不难看出,采用黄金分层分组和基于组的相关性检测策略的 LSMOEA/HS 其性能

要显著地优于仅采用黄金分层分组或基于组的相关性检测策略的算法,抑或不使用这两种方法中任何一种策略的算法. 由此表明采用黄金分层分组方法和基于组的相关性检测相混合的策略是有效的且两策略间具有较强的协合作用. 另外,LSMOEA-G 和 LSMOEA-IT 的性能在一定程度上要好于 LSMOEA,也表明了黄金分层分组方法和基于组的相关性检

测方法是有效的. 但需指出, LSMOEA-IT 相对于 LSMOEA 的优势不甚明显, 其原因在于: LSMOEA-IT 在进化前期需要对所有决策变量执行基于组的变量相关性检测, 需要耗费较大数目的函数评估, 使得优化解群的资源相对变少, 而 LSMOEA 无需执行变量相关性检测, 所有资源均用于解群优化.

**实验 3.** 为检验各算法在 2-目标 LSMOP 系列测试问题上的性能, 将它们在 45 个 2-目标 LSMOP 测试实例上进行 IGD 和 HV 性能实验. 表 5 和表 6 分别给出了各算法在全部测试实例上获得的 IGD

和 HV 值统计结果(均值和标准差), 表中每个实例算法中的最好结果加粗突出显示.

表 5 和表 6 分别列出了各算法在 LSMOP 系列 45 个 2-目标测试实例上的 IGD 值和 HV 值统计结果. 可以看出, LSMOEA/HS 在绝大部分测试实例上取得了最佳的 IGD 值和 HV 值, 说明其所采用的黄金分层分组和基于组的变量相关性检测方法在 2-目标的 LSMOP 上具有总体上的性能优势. MOEA/DVA、LMEA 和 LMOCSSO 在各测试实例上的性能表现明显不如其他算法, 说明仅采用变量分组、聚类

表 5 六种算法在 LSMOP1~LSMOP9 的 2-目标问题上获得的 IGD 值统计结果(均值和标准差)

测试问题	变量数目	MOEA/DVA	LMEA	LMOCSSO	LMOEA-DS	IM-MOEA/D	LSMOEA/HS
LSMOP1	200	1.7609e-1(1.30e-2)	2.0787e-1(7.65e-3)	2.7231e-1(9.90e-3)	1.6843e-1(3.75e-3)	1.3227e-1(4.48e-2)	<b>3.3253e-2(1.87e-3)</b>
	500	6.7901e-2(7.46e-4)	1.6401e-1(7.86e-2)	3.0532e-1(4.25e-2)	1.8419e-1(3.24e-3)	1.9151e-1(5.76e-2)	<b>2.4442e-2(2.63e-3)</b>
	1000	4.8899e-2(4.67e-3)	1.5271e-1(6.81e-2)	2.3078e-1(6.14e-2)	1.5609e-1(9.40e-4)	1.8191e-1(4.30e-2)	<b>1.1358e-2(4.95e-4)</b>
	2000	1.0259e-1(2.94e-3)	6.0990e+0(3.66e+0)	3.7768e-1(9.29e-2)	2.0724e-1(4.66e-3)	3.3020e-1(7.77e-2)	<b>2.5112e-2(1.06e-3)</b>
	5000	8.6253e-1(3.52e-2)	1.4743e+1(1.93e+1)	7.6592e-1(2.51e-3)	1.7487e-1(1.97e-3)	1.1058e-1(3.72e-2)	<b>3.1125e-2(1.97e-3)</b>
LSMOP2	200	1.3668e-1(6.91e-4)	1.1881e-1(1.83e-2)	8.8242e-2(9.85e-4)	2.5253e-2(1.07e-3)	1.2595e-1(5.66e-3)	<b>1.6755e-2(5.55e-4)</b>
	500	6.1682e-2(4.33e-4)	6.4962e-2(7.20e-3)	4.1363e-2(5.98e-4)	1.2849e-2(2.38e-4)	5.9036e-2(4.12e-4)	<b>1.1640e-2(3.04e-4)</b>
	1000	9.6859e-2(8.83e-4)	7.8193e-2(3.27e-2)	4.3479e-2(5.04e-3)	1.7310e-2(2.62e-4)	8.7329e-2(1.05e-3)	<b>8.1162e-3(4.45e-4)</b>
	2000	1.8972e-2(4.86e-4)	2.2816e-2(2.58e-4)	1.8971e-2(2.55e-4)	3.5535e-2(1.25e-3)	2.2675e-2(3.30e-3)	<b>1.2919e-2(1.43e-4)</b>
	5000	7.5282e-2(2.76e-4)	7.9044e-2(1.08e-2)	4.9047e-2(6.57e-4)	1.5168e-2(3.48e-4)	1.0146e-2(5.44e-4)	<b>1.0860e-2(2.61e-4)</b>
LSMOP3	200	5.0254e+0(2.53e+0)	1.4394e+1(8.19e+0)	8.3395e-1(1.08e-1)	1.5037e+0(1.44e-2)	<b>1.6453e-1(3.73e-3)</b> +	5.0573e-1(5.39e-3)
	500	2.1390e+0(2.13e-1)	9.2199e+2(6.40e+2)	1.5518e+0(7.86e-1)	1.5593e+0(8.24e-4)	<b>1.7596e-1(3.81e-3)</b> +	5.4397e-1(7.09e-2)
	1000	2.8632e+0(5.04e-1)	8.5161e+2(1.40e+3)	1.0343e+0(1.55e-1)	1.5230e+0(8.48e-3)	<b>5.0213e-1(9.72e-4)</b> +	6.8935e-1(1.75e-2)
	2000	2.8323e+0(3.32e-1)	1.7790e+3(1.15e+3)	1.9459e+0(6.37e-1)	2.7572e+0(1.50e-1)	<b>7.6237e-1(2.78e-3)</b> +	1.5690e+0(3.97e-4)
	5000	2.9383e+0(2.48e-1)	1.2288e+3(8.03e+2)	2.9507e+0(2.83e-1)	1.5489e+0(3.68e-3)	<b>5.0180e-1(1.02e-3)</b> +	1.2513e+0(5.85e-1)
LSMOP4	200	8.8498e-2(2.95e-3)	1.1671e-1(4.44e-3)	7.7341e-2(2.157e-2)	5.9303e-2(6.86e-3)	5.8834e-2(4.59e-3)	<b>2.3939e-2(1.26e-3)</b>
	500	3.3448e-2(1.05e-3)	1.2467e-1(2.35e-2)	5.8596e-2(4.43e-3)	3.6262e-2(7.27e-4)	2.5381e-2(1.20e-3)	<b>1.8225e-2(1.11e-3)</b>
	1000	3.7436e-2(5.94e-3)	4.9828e-2(1.20e-3)	3.3899e-2(1.07e-3)	2.9292e-2(2.28e-3)	6.9308e-2(5.60e-3)	<b>1.4121e-2(1.98e-3)</b>
	2000	4.2210e-2(1.00e-3)	4.4660e-2(8.36e-5)	2.1778e-2(3.70e-4)	2.7910e-2(3.83e-3)	2.1788e-2(1.65e-3)	<b>1.2648e-2(2.02e-4)</b>
	5000	4.6040e-2(3.55e-4)	1.4891e-1(2.98e-2)	4.7994e-2(3.21e-3)	3.9066e-2(2.66e-3)	3.7301e-2(4.48e-3)	<b>1.7932e-2(6.43e-4)</b>
LSMOP5	200	4.5754e-1(2.31e-2)	5.5557e-1(1.07e-1)	3.7547e-1(7.20e-3)	2.6134e-1(2.59e-2)	2.5744e-1(6.70e-2)	<b>7.3586e-2(1.22e-2)</b>
	500	1.9348e-1(3.74e-3)	3.0184e-1(1.25e-1)	4.9452e-1(1.65e-1)	3.6678e-1(1.63e-2)	2.7428e-1(1.21e-1)	<b>5.5167e-2(9.21e-3)</b>
	1000	6.0990e-2(4.32e-3)	4.8669e-1(1.04e-1)	4.6492e-1(1.85e-1)	1.4318e-1(5.79e-2)	2.6707e-1(1.33e-1)	<b>2.7053e-2(3.88e-3)</b>
	2000	3.7116e-1(6.66e-3)	1.0260e+1(3.29e+1)	3.8432e-1(2.78e-2)	4.7564e-1(3.07e-1)	2.0682e-1(1.10e-1)	<b>6.1416e-2(2.00e-3)</b>
	5000	7.7623e-1(2.98e-1)	4.9398e+1(3.84e+0)	7.8484e-1(3.36e-2)	1.9398e-1(1.74e-2)	5.5355e-1(1.28e-1)	<b>3.4883e-2(1.42e-2)</b>
LSMOP6	200	2.3535e+0(1.15e+0)	1.4502e+0(1.03e+0)	7.7348e-1(6.73e-3)	<b>8.0951e-2(6.25e-3)</b> +	3.4365e-1(6.58e-3)	2.9603e-1(1.94e-2)
	500	7.3668e+0(6.43e+0)	6.3625e+1(1.24e+2)	7.6262e-1(2.85e-3)	<b>5.7321e-2(8.92e-3)</b> +	5.5317e-1(4.17e-2)	3.2511e-1(1.45e-2)
	1000	2.5131e+0(2.27e+0)	4.3574e+1(2.80e+1)	7.6892e-1(1.07e-2)	<b>8.0875e-2(2.04e-2)</b> +	5.9801e-1(9.81e-2)	2.5923e-1(5.54e-2)
	2000	7.9797e+0(3.08e+0)	4.6148e+1(1.47e+1)	7.7357e-1(2.71e-2)	3.1848e-1(6.52e-3)	5.1569e-1(1.32e-1)	<b>1.9508e-1(2.15e-3)</b>
	5000	8.1493e+0(2.47e+0)	2.2618e+1(1.15e+1)	7.4565e-1(4.39e-2)	2.8501e-1(5.25e-2)	4.3642e-1(4.55e-2)	<b>1.0766e-1(4.85e-3)</b>
LSMOP7	200	2.2427e+1(8.79e+0)	5.7120e+0(2.61e+0)	3.7227e+1(1.157e+1)	1.4530e+0(5.15e-3)	1.8520e+0(3.01e-1)	<b>7.3252e-1(6.15e-2)</b>
	500	3.6818e+1(1.62e+0)	8.6532e+4(1.77e+3)	2.6303e+0(2.06e-1)	5.0916e+1(4.05e+0)	1.5635e+0(1.42e-1)	<b>1.4906e+0(2.93e-3)</b>
	1000	3.6577e+0(1.14e+0)	8.6713e+4(4.25e+3)	1.9176e+0(4.21e-1)	2.8033e+0(6.48e-1)	1.7312e+0(2.12e-1)	<b>1.3934e+0(8.84e-2)</b>
	2000	7.0208e+0(9.56e-2)	8.855e+4(3.62e+3)	2.6766e+0(2.26e+0)	1.5125e+0(6.11e-4)	2.4575e+0(1.51e+0)	<b>1.4906e+0(5.84e-1)</b>
	5000	2.9383e+0(2.48e-1)	8.2067e+4(1.77e+3)	4.7333e+0(4.19e+0)	1.4836e+0(3.00e-3)	3.2716e+0(1.17e+0)	<b>1.1992e+0(1.87e-1)</b>
LSMOP8	200	2.5623e-1(9.22e-3)	1.7679e-1(9.37e-3)	6.6458e-2(2.40e-3)	1.2944e-1(1.39e-2)	<b>3.0456e-2(3.19e-3)</b> +	6.0735e-2(3.39e-3)
	500	1.2135e-1(3.57e-3)	1.9597e+1(5.27e-1)	3.8994e-2(4.94e-3)	2.2671e-1(3.55e-2)	<b>2.1817e-2(9.04e-4)</b> +	3.3904e-2(8.71e-4)
	1000	2.2535e-1(3.32e-3)	1.9926e+1(6.04e-1)	3.9709e-2(3.57e-3)	6.1198e-2(1.01e-2)	<b>1.6837e-2(1.12e-3)</b> +	2.0310e-2(4.04e-3)
	2000	1.7324e-1(3.45e-3)	2.0345e+1(4.23e-1)	2.5989e-2(1.58e-4)	3.4756e-1(8.08e-3)	5.1039e-2(3.36e-3)	<b>1.2546e-2(4.70e-4)</b>
	5000	6.8843e-1(6.61e-3)	1.9429e+1(2.92e-1)	5.0742e-2(8.21e-3)	1.6351e-1(6.64e-3)	5.4106e-2(7.05e-3)	<b>1.7050e-2(9.50e-4)</b>
LSMOP9	200	4.2955e-1(2.59e-2)	8.5816e-1(7.03e-2)	4.0515e-1(2.55e-2)	8.1004e-1(0.00e+0)	4.4198e-1(3.90e-2)	<b>1.4049e-1(1.14e-2)</b>
	500	2.1883e-1(7.99e-3)	3.0023e+1(3.29e+1)	1.9454e-1(4.01e-3)	5.3878e-1(9.42e-2)	1.1262e-1(1.00e-2)	<b>6.3754e-2(4.17e-3)</b>
	1000	4.3724e-1(9.93e-3)	1.0902e+1(2.83e-1)	1.4000e-1(2.48e-2)	6.3449e-1(1.55e-2)	1.1592e-1(1.70e-2)	<b>2.4511e-2(3.66e-3)</b>
	2000	3.1167e-1(1.68e-2)	6.0302e+1(8.88e-1)	7.8496e-1(8.09e-2)	5.7538e-1(5.44e-2)	5.0565e-1(1.75e-3)	<b>1.0085e-1(4.91e-2)</b>
	5000	3.1167e-1(1.68e-2)	5.7495e+1(2.81e+0)	5.3232e-1(2.74e-2)	1.9492e-1(4.37e-2)	2.9401e-1(3.95e-2)	<b>1.1539e-1(9.26e-3)</b>
+/-/=		0/45/0	0/45/0	0/43/2	3/40/2	7/35/3	-

表 6 六种算法在 LSMOP1~LSMOP9 的 2-目标问题上获得的 HV 值统计结果(均值和标准差)

测试问题	变量数目	MOEA/DVA	LMEA	LMOCSO	LMOEA-DS	IM-MOEA/D	LSMOEA/HS
LSMOP1	200	3.4858e-1(1.34e-2)	3.2526e-1(6.27e-3)	2.8523e-1(7.83e-3)	3.3362e-1(6.50e-3)	4.2245e-1(3.98e-2)	<b>5.3652e-1(2.96e-3)</b>
	500	4.8973e-1(1.73e-3)	3.8282e-1(9.08e-2)	2.4827e-1(4.30e-2)	3.0547e-1(5.83e-3)	3.6130e-1(4.32e-2)	<b>5.4914e-1(3.94e-3)</b>
	1000	2.9507e-1(1.68e-3)	3.9741e-1(6.66e-2)	3.2543e-1(6.36e-2)	3.5385e-1(1.64e-3)	1.6644e-1(1.47e-2)	<b>5.6856e-1(9.15e-4)</b>
	2000	4.4706e-1(4.29e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	2.0412e-1(6.93e-2)	2.6674e-1(7.75e-3)	2.3207e-1(6.46e-2)	<b>5.4818e-1(1.15e-3)</b>
	5000	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	4.3370e-2(4.34e-3)	3.2145e-1(3.60e-3)	4.4046e-1(3.30e-2)	<b>5.4123e-1(2.08e-3)</b>
LSMOP2	200	4.1279e-1(6.89e-4)	4.3123e-1(2.09e-2)	4.7324e-1(1.41e-3)	5.5182e-1(1.68e-3)	4.2958e-1(6.12e-3)	<b>5.6304e-1(5.93e-4)</b>
	500	5.0137e-1(6.55e-4)	4.9876e-1(9.55e-3)	5.3073e-1(7.74e-4)	5.6722e-1(8.54e-5)	5.0774e-1(3.74e-4)	<b>5.6961e-1(3.94e-4)</b>
	1000	4.5943e-1(2.02e-3)	4.8344e-1(3.94e-2)	5.2757e-1(6.17e-3)	5.6161e-1(6.18e-4)	4.7429e-1(8.52e-4)	<b>5.7447e-1(5.54e-4)</b>
	2000	5.5740e-1(5.22e-4)	5.5259e-1(7.54e-4)	5.5997e-1(3.61e-4)	5.3923e-1(1.56e-3)	3.2304e-1(2.68e-3)	<b>5.6795e-1(1.84e-4)</b>
	5000	4.8379e-1(1.38e-3)	4.8094e-1(1.48e-2)	5.2095e-1(7.83e-4)	5.6434e-1(7.31e-4)	4.9440e-1(6.49e-4)	<b>5.7068e-1(2.26e-4)</b>
LSMOP3	200	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	2.2311e-2(4.46e-2)	0.0000e+0(0.00e+0)	9.0469e-2(3.64e-4)	9.0469e-2(3.64e-4)
	500	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	1.2854e-1(1.12e-3)	9.0245e-2(4.34e-4)
	1000	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	<b>9.1007e-2(1.72e-4)</b>	0.0000e+0(0.00e+0)
	2000	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	<b>4.9627e-2(4.92e-3)</b>	0.0000e+0(0.00e+0)
	5000	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	<b>9.0538e-2(3.60e-4)</b>	0.0000e+0(0.00e+0)
LSMOP4	200	4.6538e-1(4.06e-3)	4.3562e-1(4.09e-3)	4.8636e-1(1.99e-2)	5.0748e-1(8.55e-3)	5.0214e-1(5.92e-3)	<b>5.5180e-1(2.28e-3)</b>
	500	5.3716e-1(2.12e-3)	4.2878e-1(2.86e-2)	5.0950e-1(5.69e-3)	5.3651e-1(9.43e-4)	5.4898e-1(2.00e-3)	<b>5.6143e-1(1.34e-3)</b>
	1000	5.3194e-1(8.20e-3)	5.1623e-1(1.39e-3)	5.4223e-1(1.47e-3)	5.4562e-1(3.18e-3)	2.5529e-1(4.11e-3)	<b>5.6468e-1(2.85e-3)</b>
	2000	2.8995e-1(3.91e-3)	5.2341e-1(5.58e-4)	5.5659e-1(4.89e-4)	5.4656e-1(4.82e-3)	5.5447e-1(2.17e-3)	<b>5.6590e-1(5.54e-4)</b>
	5000	5.2060e-1(4.17e-4)	4.0239e-1(3.44e-2)	5.2442e-1(4.07e-3)	5.3291e-1(3.71e-3)	5.3155e-1(6.00e-3)	<b>5.6173e-1(7.20e-4)</b>
LSMOP5	200	1.9655e-3(2.40e-3)	4.7972e-3(4.77e-3)	9.4979e-2(8.30e-3)	9.5619e-2(6.42e-3)	1.7658e-1(1.24e-2)	<b>2.5315e-1(2.96e-3)</b>
	500	1.2190e-1(3.44e-3)	9.9950e-2(1.29e-2)	6.7637e-2(1.57e-2)	9.0908e-2(6.31e-7)	1.1957e-1(3.15e-2)	<b>2.8298e-1(3.49e-3)</b>
	1000	2.6587e-1(5.63e-3)	8.8765e-2(5.30e-4)	9.5233e-2(3.00e-3)	1.8103e-1(2.47e-2)	1.2857e-1(4.26e-2)	<b>3.3477e-1(1.01e-3)</b>
	2000	1.9133e-1(1.13e-2)	0.0000e+0(0.00e+0)	9.8363e-2(4.24e-3)	1.2970e-1(4.50e-2)	1.6744e-1(3.32e-2)	<b>2.7650e-1(5.44e-3)</b>
	5000	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	1.2643e-1(4.14e-2)	8.6530e-2(4.29e-4)	<b>3.2608e-1(8.71e-3)</b>
LSMOP6	200	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	3.0478e-2(1.15e-2)	<b>2.7443e-1(4.00e-3)</b>	3.0070e-2(4.24e-3)	1.1548e-1(7.51e-3)
	500	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	4.8643e-2(5.12e-3)	2.1530e-1(4.33e-3)	8.7267e-2(4.79e-3)	<b>3.4134e-1(1.23e-3)</b>
	1000	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	3.8613e-2(1.85e-2)	<b>2.3613e-1(3.08e-2)</b>	8.0687e-2(2.02e-2)	8.4349e-2(1.58e-2)
	2000	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	3.7901e-2(3.87e-2)	4.3475e-2(7.15e-3)	9.0770e-2(2.12e-5)	<b>3.5387e-1(6.62e-4)</b>
	5000	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	5.0956e-2(6.89e-4)	8.5348e-2(1.49e-3)	<b>4.3962e-1(4.51e-3)</b>
LSMOP7	200	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	<b>5.2020e-2(8.15e-3)</b>
	500	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)
	1000	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)
	2000	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)
	5000	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)
LSMOP8	200	6.6446e-2(2.50e-3)	1.3445e-1(2.40e-2)	2.6435e-1(1.62e-3)	2.2127e-1(1.07e-2)	<b>3.1112e-1(2.60e-3)</b>	2.7403e-1(4.87e-3)
	500	1.8169e-1(1.61e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	3.0208e-1(4.36e-3)	1.6751e-1(1.72e-2)	<b>3.2312e-1(6.14e-4)</b>	3.0467e-1(1.21e-3)
	1000	1.4535e-1(1.38e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	3.0115e-1(8.08e-3)	2.7154e-1(9.98e-3)	3.2834e-1(1.05e-3)	<b>3.3199e-1(1.22e-3)</b>
	2000	1.3301e-1(1.72e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	3.1559e-1(1.03e-4)	1.1650e-1(2.18e-3)	2.8091e-1(8.30e-3)	<b>3.3183e-1(6.95e-4)</b>
	5000	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	2.8195e-1(9.98e-3)	1.9845e-1(6.17e-4)	2.8391e-1(5.14e-3)	<b>3.2790e-1(2.03e-3)</b>
LSMOP9	200	7.8424e-2(5.76e-3)	5.2675e-2(1.45e-2)	8.6801e-2(4.58e-3)	9.0909e-2(0.00e+0)	8.8026e-2(4.07e-4)	<b>1.7694e-1(4.46e-3)</b>
	500	1.4587e-1(1.78e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	1.5715e-1(1.28e-3)	1.3413e-1(8.64e-3)	1.8124e-1(3.91e-3)	<b>2.1043e-1(1.22e-3)</b>
	1000	3.9450e-2(2.07e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	1.7636e-1(9.31e-3)	1.2048e-1(3.76e-3)	1.8886e-1(4.30e-3)	<b>2.3441e-1(1.65e-3)</b>
	2000	1.1403e-1(2.55e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	3.8784e-3(7.76e-3)	1.3039e-1(4.52e-3)	9.0664e-2(3.06e-4)	<b>2.4081e-1(4.30e-2)</b>
	5000	1.1403e-1(2.55e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	1.8688e-1(4.01e-3)	1.5325e-1(1.75e-2)	1.1603e-1(8.99e-3)	<b>6.0578e-1(1.70e-1)</b>
+/-/=		0/41/4	0/41/4	0/39/6	2/39/4	7/33/5	-

分组和竞争粒子群优化的进化方式尚难以较好地处理 LSMOPs。相对而言,IM-MOEA/D和 LMOEA-DS 具有一定的性能优势,其原因在于:(1)IM-MOEA/D 基于学习模型的混合策略对变量进行整体优化,其在处理目标函数具有混合可分性的 LSMOP3 和 LSMOP8 测试实例上具有一定优势;(2)LMOEA-DS 在部分维度的 LSMOP5 和 LSMOP6 测试实例上取得了较好的值,其原因在于该算法通过对理想点的采样引导子代生成,并互补地使用非支配排序与参考向量进行环境选择的方式发挥了较好的

作用。需要注意的是,绝大多数算法在 LSMOP3 和 LSMOP7 上的 HV 值为 0,表明这些算法对于多模态的 LSMOP3 和 LSMOP7 是很难收敛到参考点空间之内的。

**实验 4.** 为更直观展示 LSMOEA/HS 与各对比算法在处理 2-目标 1000 维 LSMOP 时的性能表现,图 4 根据表 1 各测试问题的特性,列出了代表性问题 LSMOP1、LSMOP4、LSMOP5 和 LSMOP9 在 2-目标 1000 维测试实例上的 IGD 值变化曲线。

从图 4 可以看出,LSMOEA/HS 在代表性的

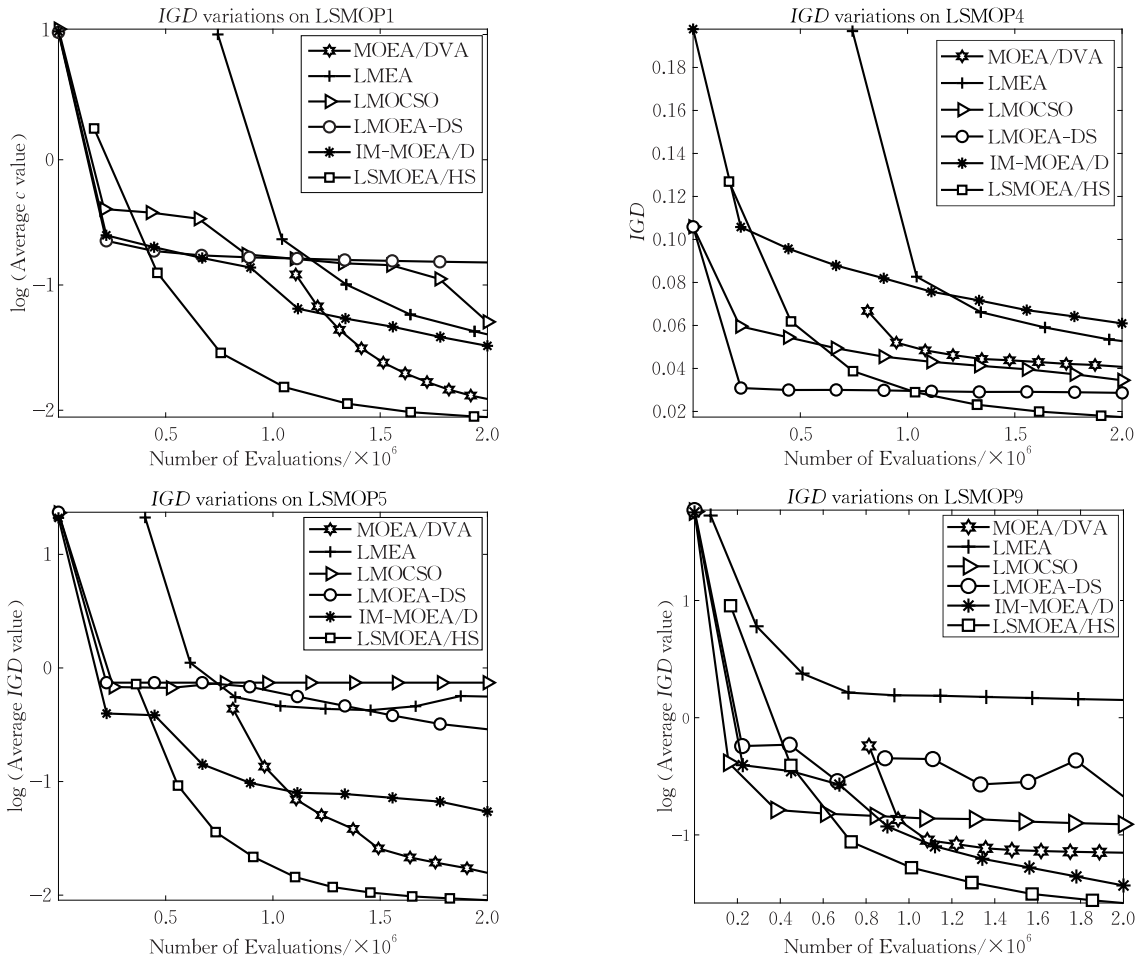


图 4 各算法在 2-目标 1000 维的 LSMOP1、LSMOP4、LSMOP5 和 LSMOP9 测试实例上进行 30 次独立运行所获得的平均 IGD 值变化曲线

LSMOP 测试实例上能较快地获得高质量的解集。需要注意的是,进化早期需要进行分类操作的 MOEA/DVA、LMEA 和 LSMOEA/HS 没有对应的 IGD 值,原因在于此时它们对个体的评估仅用于决策变量分类,尚未启动种群的进化。相对其他算法,LSMOEA/HS 耗费较少的计算资源即能获得较小的 IGD 值,这反映了其黄金分层分组方法能节省大量计算资源,使得算法能有更多的计算资源用于解群优化。此后,由于 LSMOEA/HS 采用了不同的策略优化收敛性组和变量性组,使得算法能较快地获得质量较好的解集,对应的 IGD 曲线呈现较快下降的局面。在进化后期,各算法的 IGD 曲线呈现缓慢下降趋势,但在经历  $2 \times 10^6$  次函数评估后,LSMOEA/HS 获得了全部算法中最小的 IGD 值。总体上,LSMOEA/HS 相对其他算法能较快地获得高质量的解集,表明了本文算法在 2-目标 LSMOP 上具有竞争优势。

**实验 5.** 为进一步展示 LSMOEA/HS 与各对比算法在处理 2-目标 LSMOP 问题时在目标空间的表

现,图 5 给出各算法在 2-目标 1000 维的 LSMOP1、LSMOP4、LSMOP5 和 LSMOP9 测试实例上运行结果与真实 PF 的对比图,并通过局部放大对细节进行展示。

从图 5 可以看出,LSMOEA/HS 在几个代表性测试实例上获得的近似解集与真实 PF 的距离最近且分布均匀。LMEA、LMOCSO 在 LSMOP1、LSMOP5 和 LSMOP9 测试实例上获得的近似解集与真实 PF 有明显较大的间隙,表明这两种算法的性能较差,明显不如 LSMOEA/HS。LMOEA-DS 在 LSMOP1 和 LSMOP9 上取得了仅次于 LSMOEA/HS 的性能,表明其所采用的子代生成和环境选择策略能在一定程度上获得较高质量的解集。IM-MOEA/D 在 LSMOP4 和 LSMOP5 上也取得了仅次于 LSMOEA/HS 的性能,表明其所采用的基于分解的反转模型策略可以有效地促进种群进化。总之,通过对各算法解群的局部放大清楚地表明了 LSMOEA/HS 能获得高质量的解集,反映出其具有良好的解题性能。

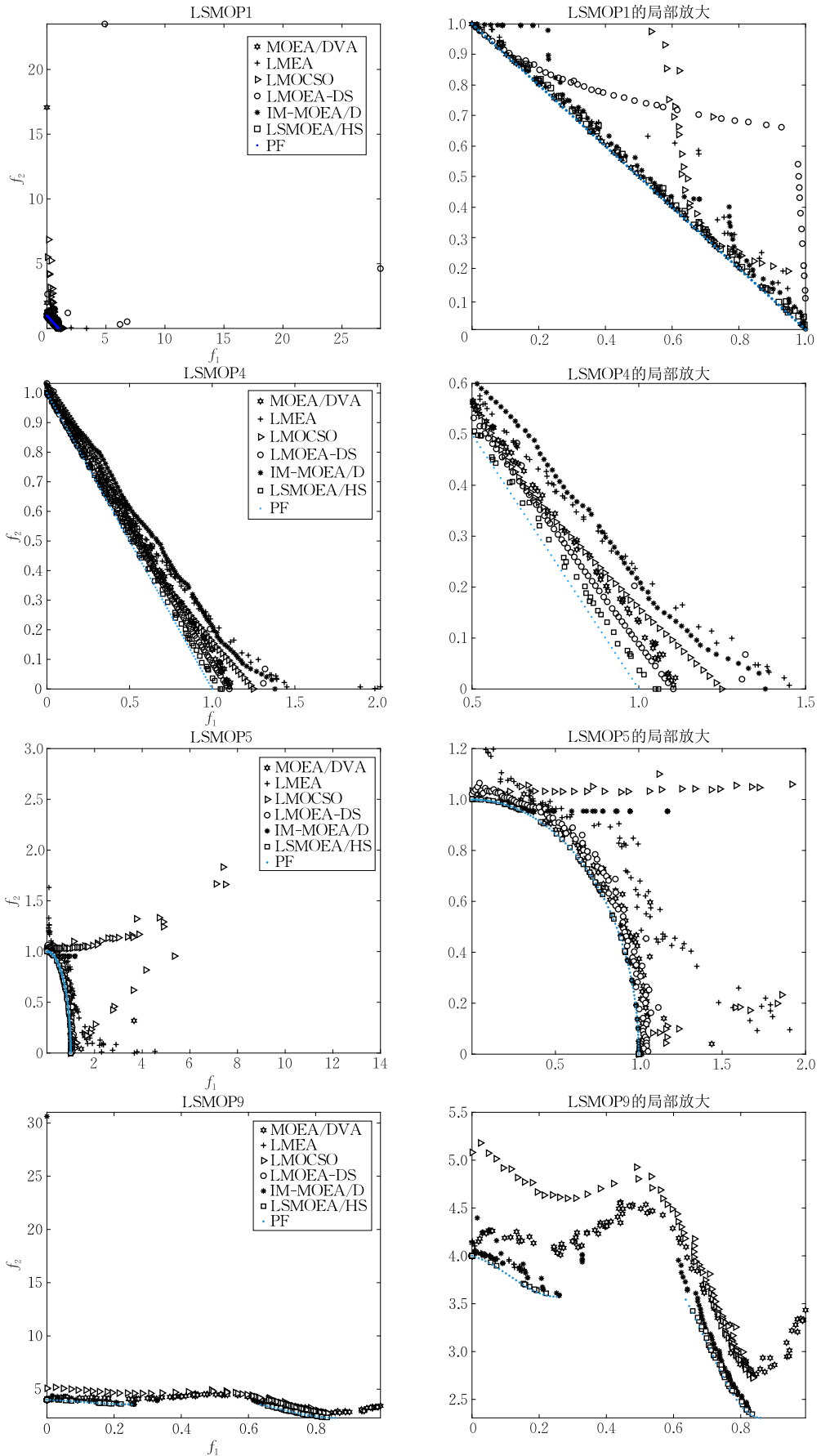


图 5 各算法在 2-目标 1000 维 LSMOP1、LSMOP4、LSMOP5 和 LSMOP9 测试实例上获得的近似 PF 对比图 (蓝色部分为真实 PF)

**实验 6.** 为检验各算法在 3-目标 LSMOP 上的性能, 将它们在 45 个 3-目标 LSMOP 测试实例上进行 *IGD* 和 *HV* 性能实验. 表 7 和表 8 分别给出了各算法在全部测试实例上获得的 *IGD* 和 *HV* 值统计结果(均值和标准差), 表中每个实例算法中的最好结果加粗突出显示.

表 7 和表 8 分别给出了各算法在 45 个 3-目标测试实例上获得的 *IGD* 值和 *HV* 值的统计结果. 可以看出, LSMOEA/HS 在绝大多数的测试实例上能获得最佳的 *IGD* 值和 *HV* 值, 进一步验证采用了黄

金分层分组与基于组的变量相关性检测相混合策略的 LSMOEA/HS 在求解 3-目标的 LSMOP 测试问题时具有显著较优的性能. 在全部 45 个测试实例中, LMOEA-DS 在 7 个测试实例上获得最佳的 *IGD* 值, 在 6 个测试实例上获得最佳的 *HV* 值, 表现出仅次于 LSMOEA/HS 的较好的性能. 其原因在于: LMOEA-DS 在环境选择策略中互补地使用了非支配排序和参考向量的机制有利于解决部分可分混合模态的 LSMOP 问题. IM-MOEA/D 在 2 个测试实例上获得最佳的 *IGD* 值, 在 2 个实例上获得最佳的

**表 7** 六种算法在 LSMOP1~LSMOP9 的 3-目标问题上获得的 *IGD* 值统计结果(均值和标准差)

测试问题	变量数目	MOEA/DVA	LMEA	LMCOSSO	LMOEA-DS	IM-MOEA/D	LSMOEA/HS
LSMOP1	200	8.6151e-2(4.52e-3)	1.8398e-1(1.11e-2)	1.8937e-1(9.17e-3)	3.1627e-1(4.86e-2)	3.4329e-1(2.55e-2)	<b>5.7448e-2(2.77e-3)</b>
	500	9.1723e-2(3.68e-3)	8.6299e+0(5.03e+0)	2.8108e-1(2.99e-2)	3.6396e-1(1.32e-2)	3.8032e-1(1.95e-3)	<b>5.7372e-2(2.90e-3)</b>
	1000	7.4724e-2(4.17e-3)	3.3446e-1(3.07e-1)	9.6714e-2(6.70e-3)	3.1738e-1(5.29e-3)	3.1751e-1(2.49e-2)	<b>4.8644e-2(2.68e-3)</b>
	2000	6.6624e-1(4.71e-2)	1.1397e+1(3.19e-1)	5.3388e-1(3.46e-2)	4.0088e-1(5.10e-3)	3.7553e-1(3.09e-2)	<b>1.2168e-1(4.22e-3)</b>
	5000	2.7491e-1(1.34e-2)	8.2882e+0(3.93e+0)	7.0328e-1(8.68e-2)	4.1182e-1(8.37e-4)	3.6791e-1(2.26e-2)	<b>5.9935e-2(4.24e-3)</b>
LSMOP2	200	3.5620e-1(1.11e-2)	6.8915e-1(2.03e-1)	7.5295e-1(3.32e-2)	2.1137e-1(2.61e-2)	2.1589e-1(1.09e-2)	<b>1.1667e-1(1.49e-3)</b>
	500	7.0711e-2(2.53e-3)	7.4052e-2(5.95e-3)	2.1840e-1(1.95e-2)	<b>5.1812e-2(2.35e-3)</b> +	6.8897e-2(2.17e-4)	6.4267e-2(2.149e-3)
	1000	8.7739e-2(2.67e-3)	1.6028e-1(1.68e-1)	8.8084e-2(6.01e-4)	<b>5.0036e-2(1.47e-3)</b> +	7.0557e-2(1.05e-3)	5.9297e-2(2.20e-3)
	2000	7.4450e-2(3.47e-3)	2.4248e-1(1.91e-2)	7.9820e-2(6.62e-3)	<b>4.5536e-2(1.20e-3)</b> +	6.2669e-2(1.96e-4)	5.5400e-2(2.06e-3)
	5000	6.1103e-2(2.49e-3)	5.9548e-2(2.89e-3)	9.4967e-1(1.18e-3)	<b>4.1783e-2(1.25e-3)</b> +	6.1904e-2(2.58e-5)	5.6040e-2(1.70e-4)
LSMOP3	200	1.6746e+0(1.58e-1)	7.0865e-1(5.68e-2)	4.8839e+0(3.54e+0)	8.3868e-1(4.38e-2)	6.1907e-1(4.53e-2)	<b>5.0167e-1(5.91e-2)</b>
	500	1.7944e+0(2.80e-1)	5.6184e-1(4.59e-2)	9.4594e-1(9.71e-6)	8.3766e-1(4.56e-2)	6.3441e-1(1.44e-2)	<b>1.0575e-1(3.23e-3)</b>
	1000	5.7313e-1(3.19e-2)	6.0974e-1(1.44e-1)	8.4428e-1(2.63e-2)	8.1102e-1(4.75e-2)	6.1321e-1(1.13e-2)	<b>4.1242e-1(1.99e-2)</b>
	2000	5.9853e-1(2.43e-2)	1.9596e-1(3.90e-3)	9.4612e-1(1.06e-4)	8.6018e-1(3.80e-4)	6.4203e-1(2.55e-2)	<b>1.0827e-1(5.52e-3)</b>
	5000	3.3563e-1(1.59e-3)	2.4248e-1(1.91e-2)	9.4624e-1(8.54e-4)	8.6058e-1(1.79e-4)	6.7602e-1(3.05e-2)	<b>5.1286e-2(1.23e-3)</b>
LSMOP4	200	1.3670e-1(4.98e-3)	1.6408e-1(8.76e-3)	2.2058e-1(5.63e-3)	2.0140e-1(3.37e-3)	2.1321e-1(9.10e-2)	<b>8.5667e-2(5.53e-3)</b>
	500	7.9496e-2(3.96e-3)	2.1759e-1(3.67e-3)	1.3571e-1(7.80e-4)	1.0706e-1(1.42e-3)	9.6476e-2(3.26e-3)	<b>6.7362e-2(1.03e-3)</b>
	1000	8.3874e-2(4.02e-3)	1.2000e-1(7.47e-2)	8.6117e-2(6.93e-3)	1.4748e-1(8.62e-3)	1.0171e-1(4.80e-3)	<b>5.2567e-2(1.34e-3)</b>
	2000	9.2570e-2(4.17e-3)	8.2659e-2(8.11e-3)	8.9295e-1(1.06e-1)	8.2097e-1(4.10e-2)	6.6616e-2(6.85e-4)	<b>5.8420e-2(2.50e-3)</b>
	5000	5.9901e-2(7.95e-3)	6.2618e-2(3.32e-3)	7.3348e-1(2.83e-2)	5.8841e-2(2.93e-3)	6.7528e-2(6.97e-3)	<b>4.5400e-2(3.24e-3)</b>
LSMOP5	200	1.8253e-1(8.23e-3)	8.4553e+0(8.83e-1)	9.4593e-1(7.30e-8)	3.1097e-1(9.31e-3)	2.8404e-1(1.90e-2)	<b>9.2313e-2(3.34e-3)</b>
	500	2.2877e-1(3.24e-3)	1.4385e+1(3.60e+0)	6.7656e-1(1.99e-1)	3.5613e-1(1.12e-2)	3.1117e-1(4.92e-2)	<b>1.0069e-1(4.51e-3)</b>
	1000	7.4846e-2(6.32e-3)	6.5622e+0(5.67e-1)	9.4592e-1(6.54e-9)	2.8840e-1(7.45e-3)	2.7517e-1(4.23e-2)	<b>6.1232e-2(9.06e-4)</b>
	2000	7.7249e-2(3.63e-3)	2.0561e+1(6.41e-1)	5.2414e-1(1.90e-2)	3.7224e-1(1.26e-2)	3.1675e-1(2.36e-2)	<b>5.9022e-2(1.47e-3)</b>
	5000	9.5873e-2(5.29e-4)	2.0913e+1(5.14e-1)	5.2516e-1(7.83e-3)	4.0457e-1(1.97e-2)	3.1843e-1(3.00e-3)	<b>6.9335e-2(5.28e-3)</b>
LSMOP6	200	1.4518e+1(5.18e+0)	2.8063e+3(5.61e+3)	1.6020e+0(3.48e-1)	<b>2.5616e-1(3.31e-2)</b> +	1.5699e+0(7.17e-1)	7.3110e-1(8.16e-2)
	500	1.8095e+1(9.53e-1)	1.4323e+4(1.91e+4)	2.0928e+0(3.33e-1)	<b>4.2859e-1(2.23e-1)</b> +	2.1708e+0(5.59e-1)	8.5426e-1(7.33e-2)
	1000	6.1692e+0(1.03e+0)	3.0400e+4(2.03e+4)	2.0970e+0(3.78e-1)	<b>5.8757e-1(2.94e-4)</b> +	1.1322e+0(3.01e-1)	8.9202e-1(2.15e-1)
	2000	5.1288e+0(3.37e-1)	4.3157e+4(5.88e+3)	1.9022e+0(1.88e-1)	7.3662e-1(1.86e-2)	2.8646e+0(1.18e-1)	<b>2.9118e-1(2.06e-2)</b>
	5000	3.7272e+0(6.48e-2)	4.0144e+4(6.02e+3)	1.7894e+0(2.15e-1)	7.4569e-1(3.64e-2)	2.1553e+0(7.87e-1)	<b>7.2760e-2(8.23e-4)</b>
LSMOP7	200	2.5525e+0(2.29e+0)	2.3821e+0(1.10e+0)	9.4606e-1(1.24e-4)	9.2458e-1(2.33e-2)	<b>2.0455e-1(2.53e-2)</b> +	8.1552e-1(5.44e-2)
	500	2.8768e+0(6.46e-1)	3.4367e+0(4.32e+0)	9.4202e-1(9.88e-2)	8.7126e-1(2.09e-3)	<b>2.3959e-1(5.59e-2)</b> =	3.2573e-1(2.32e-1)
	1000	9.3751e-1(1.74e-1)	1.2984e+0(3.76e-1)	9.4593e-1(7.21e-5)	8.8026e-1(1.39e-2)	6.7524e-1(1.87e-1)	<b>1.5200e-1(1.03e-2)</b>
	2000	5.8965e-1(1.171e-2)	1.0691e+3(8.15e+2)	9.5626e-1(1.176e-3)	8.7226e-1(7.95e-2)	9.3107e-1(2.97e-2)	<b>1.4130e-1(2.33e-3)</b>
	5000	5.5856e-1(9.72e-3)	2.6740e+3(2.46e+3)	9.4834e-1(1.46e-3)	7.2441e-1(2.67e-2)	9.4592e-1(4.55e-7)	<b>1.0331e-1(3.08e-3)</b>
LSMOP8	200	3.1545e-1(5.90e-3)	1.9522e-1(4.08e-2)	9.5010e-1(1.91e-3)	2.3672e-1(7.45e-2)	2.3361e-1(7.94e-2)	<b>1.2366e-1(3.05e-3)</b>
	500	1.5240e-1(5.91e-3)	2.0213e-1(1.21e-2)	9.4116e-1(1.09e-2)	1.7060e-1(1.45e-2)	2.2515e-1(3.19e-2)	<b>9.4253e-2(5.19e-3)</b>
	1000	8.4102e-2(3.59e-3)	1.1055e-1(7.98e-4)	9.0510e-1(6.70e-2)	1.7210e-1(7.37e-3)	2.8725e-1(7.55e-2)	<b>7.0607e-2(4.40e-4)</b>
	2000	7.0841e-1(1.21e-1)	9.2946e-1(4.99e-1)	9.4613e-1(3.16e-4)	1.5620e-1(9.14e-3)	2.1628e-1(4.76e-2)	<b>8.5526e-2(2.72e-3)</b>
	5000	7.8766e-2(4.43e-2)	8.7513e-1(2.17e-2)	9.4606e-1(8.64e-5)	1.4548e-1(1.81e-2)	1.7727e-1(2.73e-2)	<b>7.0607e-2(4.40e-4)</b>
LSMOP9	200	4.1852e-1(1.92e-2)	9.9448e-1(1.08e-1)	6.0852e-1(1.94e-1)	5.8385e-1(8.30e-4)	3.2210e-1(1.06e-1)	<b>1.9603e-1(6.89e-3)</b>
	500	4.4020e-1(1.59e-2)	7.3252e-1(6.15e-2)	9.4835e-1(2.30e-1)	5.7758e-1(1.68e-3)	2.6410e-1(5.97e-2)	<b>1.7031e-1(1.52e-2)</b>
	1000	1.8155e-1(6.58e-3)	5.8468e-1(5.75e-2)	4.1335e-1(2.93e-1)	5.8231e-1(3.42e-3)	2.2016e-1(3.74e-2)	<b>1.0992e-1(2.92e-3)</b>
	2000	1.2997e-1(6.67e-3)	1.4714e+2(4.97e+0)	4.6772e+1(4.07e+1)	5.7582e-1(2.98e-3)	1.6698e-1(1.46e-2)	<b>7.0407e-2(4.71e-3)</b>
	5000	1.3233e-1(1.37e-2)	9.6700e+1(6.57e+1)	8.5604e+1(3.61e+1)	5.7508e-1(2.70e-3)	1.9205e-1(6.83e-3)	<b>7.5049e-2(1.79e-3)</b>
	+/-/=	0/45/0	0/45/0	0/45/0	7/38/0	1/41/3	-



表 8 六种算法在 LSMOP1~LSMOP9 的 3-目标问题上获得的 HV 值统计结果(均值和标准差)

测试问题	变量数目	MOEA/DVA	LMEA	LMOCSSO	LMOEA-DS	IM-MOEA/D	LSMOEA/HS	
LSMOP1	200	7.5554e-1(6.42e-3)	5.9602e-1(2.18e-2)	5.8692e-1(1.78e-2)	4.7651e-1(6.71e-2)	3.7676e-1(5.26e-2)	<b>8.0910e-1(2.79e-3)</b>	
	500	7.4060e-1(7.92e-3)	1.6598e-4(3.32e-4)	4.6859e-1(3.57e-2)	3.8219e-1(1.28e-2)	3.0239e-1(4.73e-3)	<b>7.9744e-1(5.61e-3)</b>	
	1000	7.7128e-1(4.86e-3)	4.7156e-1(3.55e-1)	7.5304e-1(1.23e-2)	4.6432e-1(7.88e-3)	4.3039e-1(4.42e-2)	<b>8.2876e-1(3.05e-3)</b>	
	2000	5.5725e-2(3.85e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	2.0753e-1(3.11e-2)	3.5527e-1(8.65e-3)	3.1587e-1(6.65e-2)	<b>7.0988e-1(5.94e-3)</b>	
	5000	1.7809e-1(5.30e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	9.6917e-2(4.11e-2)	3.4568e-1(3.86e-3)	3.3350e-1(4.37e-2)	<b>7.9134e-1(1.18e-2)</b>	
LSMOP2	200	3.9991e-1(1.38e-2)	1.1636e-1(8.02e-2)	9.1660e-2(1.49e-3)	6.0642e-1(4.15e-2)	5.7810e-1(1.15e-2)	<b>7.3988e-1(1.48e-3)</b>	
	500	7.7091e-1(8.27e-3)	7.7816e-1(1.81e-2)	5.3686e-1(2.38e-2)	7.9758e-1(5.08e-3)	7.7835e-1(1.02e-3)	<b>7.9853e-1(2.71e-3)</b>	
	1000	7.5309e-1(7.22e-3)	7.2536e-1(1.15e-1)	7.7049e-1(9.30e-4)	<b>8.1432e-1(3.81e-3)</b> +	7.7811e-1(1.60e-3)	7.8885e-1(1.52e-3)	
	2000	4.9584e-1(3.93e-3)	5.5319e-1(3.95e-2)	7.7117e-1(1.31e-2)	<b>8.2684e-1(1.29e-3)</b> +	7.9444e-1(2.42e-4)	7.9839e-1(2.21e-3)	
	5000	8.0036e-1(8.13e-3)	8.0109e-1(8.41e-4)	8.3793e-2(2.23e-3)	<b>8.0985e-1(4.70e-3)</b> +	7.9928e-1(2.02e-4)	8.0968e-1(1.55e-3)	
LSMOP3	200	0.0000e+0(0.00e+0)	6.5606e-2(5.74e-3)	2.2727e-2(4.55e-2)	9.0949e-2(2.27e-5)	1.5144e-1(1.50e-2)	<b>2.4746e-1(4.34e-2)</b>	
	500	0.0000e+0(0.00e+0)	1.3745e-1(2.61e-2)	9.0879e-2(1.85e-5)	9.0988e-2(7.84e-5)	9.7658e-2(7.81e-3)	<b>4.6147e-1(8.53e-3)</b>	
	1000	1.5775e-1(4.12e-2)	1.7041e-1(1.18e-1)	9.0913e-2(7.63e-6)	9.1271e-2(1.48e-4)	1.9090e-1(1.34e-2)	<b>3.4921e-1(2.70e-2)</b>	
	2000	1.3541e-1(3.37e-2)	3.0195e-1(1.96e-3)	9.0472e-2(2.55e-4)	9.1132e-2(1.31e-4)	1.1785e-1(3.11e-2)	<b>4.4366e-1(1.13e-2)</b>	
	5000	4.1331e-1(3.47e-4)	5.5319e-1(3.95e-2)	8.9431e-2(1.12e-3)	9.0982e-2(9.69e-5)	7.5429e-2(3.07e-2)	<b>8.2572e-1(2.81e-3)</b>	
LSMOP4	200	6.8640e-1(8.00e-3)	6.4924e-1(7.11e-3)	6.1072e-1(8.15e-3)	6.2260e-1(6.03e-3)	6.0177e-1(1.28e-1)	<b>7.6585e-1(4.26e-3)</b>	
	500	7.6168e-1(1.13e-2)	5.6951e-1(1.44e-2)	7.1073e-1(5.36e-4)	7.4034e-1(7.66e-3)	7.4949e-1(3.59e-3)	<b>7.8894e-1(4.47e-3)</b>	
	1000	7.5853e-1(9.69e-3)	7.2425e-1(8.92e-2)	7.8050e-1(7.29e-3)	6.9262e-1(8.74e-3)	7.4600e-1(8.92e-3)	<b>8.1784e-1(3.21e-3)</b>	
	2000	7.4262e-1(4.40e-3)	7.6242e-1(2.03e-2)	8.9578e-2(1.65e-3)	9.1007e-2(6.87e-5)	7.8607e-1(5.02e-4)	<b>8.0186e-1(5.27e-3)</b>	
	5000	8.0444e-1(1.35e-2)	7.8757e-1(4.03e-3)	7.0575e-2(1.61e-3)	8.4000e-1(4.00e-3)	7.7531e-1(1.77e-2)	<b>8.0477e-1(4.46e-3)</b>	
LSMOP5	200	3.1133e-1(1.36e-2)	0.0000e+0(0.00e+0)	9.0909e-2(2.91e-7)	3.4666e-1(7.62e-3)	2.5792e-1(8.01e-3)	<b>4.9510e-1(6.15e-3)</b>	
	500	2.5123e-1(2.74e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	9.7423e-2(2.21e-2)	3.4211e-1(7.62e-4)	2.3727e-1(4.41e-2)	<b>4.5581e-1(8.80e-3)</b>	
	1000	5.0494e-1(8.64e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	9.0909e-2(1.15e-8)	3.8266e-1(1.00e-2)	2.6283e-1(1.26e-2)	<b>7.9504e-1(4.04e-3)</b>	
	2000	4.9691e-1(1.86e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	1.1564e-1(4.99e-3)	3.4180e-1(2.65e-4)	2.4895e-1(8.87e-5)	<b>7.9641e-1(3.77e-3)</b>	
	5000	4.4062e-1(6.85e-4)	0.0000e+0(0.00e+0)	1.0350e-1(4.88e-3)	3.3996e-1(2.03e-3)	2.4883e-1(3.38e-5)	<b>5.1576e-1(3.28e-3)</b>	
LSMOP6	200	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	<b>5.4437e-1(4.44e-2)</b> +	0.0000e+0(0.00e+0)	2.2723e-2(9.45e-3)	
	500	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	<b>2.9745e-1(1.95e-1)</b> =	0.0000e+0(0.00e+0)	2.0502e-2(3.02e-2)	
	1000	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	<b>1.9167e-1(9.82e-5)</b> +	0.0000e+0(0.00e+0)	3.7909e-3(7.50e-3)	
	2000	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	1.3845e-2(5.73e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	<b>3.8367e-1(1.77e-2)</b>	
	5000	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	1.3113e-2(8.06e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	<b>7.9049e-1(1.24e-3)</b>	
LSMOP7	200	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	9.0551e-2(1.06e-4)	0.0000e+0(0.00e+0)	<b>2.2106e-1(8.33e-3)</b> +	1.7025e-4(3.29e-4)	
	500	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	2.9128e-2(3.45e-2)	0.0000e+0(0.00e+0)	<b>3.5759e-1(3.19e-2)</b> +	1.5087e-1(9.39e-2)	
	1000	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	9.0846e-2(6.50e-5)	0.0000e+0(0.00e+0)	9.0922e-2(3.47e-5)	<b>2.3132e-1(5.36e-3)</b>	
	2000	7.6285e-2(5.81e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	6.6391e-2(2.38e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	9.0902e-2(1.69e-6)	<b>7.0532e-1(1.68e-3)</b>	
	5000	9.1538e-2(3.97e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	8.3937e-2(4.31e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	9.0906e-2(1.07e-6)	<b>7.4404e-1(4.90e-3)</b>	
LSMOP8	200	1.6390e-1(4.50e-3)	3.1169e-1(2.84e-2)	8.2788e-2(3.89e-3)	3.7535e-1(1.38e-2)	3.4991e-1(1.39e-2)	<b>4.1638e-1(5.24e-3)</b>	
	500	3.6393e-1(3.73e-3)	3.2384e-1(7.76e-3)	8.9802e-2(1.76e-3)	3.8028e-1(1.11e-2)	3.6229e-1(1.55e-2)	<b>4.6856e-1(7.94e-3)</b>	
	1000	4.7835e-1(6.06e-3)	4.2642e-1(4.52e-3)	8.4833e-2(6.66e-3)	3.8247e-1(8.66e-3)	3.4957e-1(7.70e-3)	<b>7.7697e-1(7.20e-4)</b>	
	2000	7.2599e-2(5.34e-2)	5.0305e-2(3.40e-2)	9.0411e-2(4.45e-4)	4.1161e-1(8.03e-3)	3.6703e-1(2.01e-2)	<b>5.2326e-1(7.23e-3)</b>	
	5000	5.1689e-1(1.64e-3)	3.7544e-2(4.15e-2)	9.0644e-2(1.88e-4)	4.1686e-1(7.51e-3)	3.8935e-1(1.15e-2)	<b>7.7697e-1(7.20e-4)</b>	
LSMOP9	200	1.3010e-1(8.15e-3)	3.6491e-2(1.07e-2)	8.1961e-2(2.32e-2)	1.9025e-1(2.50e-4)	2.0687e-1(1.08e-2)	<b>2.0802e-1(6.48e-3)</b>	
	500	1.0848e-1(4.77e-3)	5.2020e-2(8.15e-3)	5.7186e-2(1.04e-2)	1.9035e-1(3.78e-4)	2.0393e-1(1.11e-2)	<b>2.1058e-1(2.91e-3)</b>	
	1000	2.0538e-1(5.08e-3)	1.1407e-1(2.81e-2)	1.5299e-1(1.01e-1)	1.9030e-1(3.08e-4)	2.1913e-1(1.98e-3)	<b>4.2209e-1(5.10e-3)</b>	
	2000	2.4070e-1(2.77e-3)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	1.9064e-1(3.31e-4)	2.1251e-1(6.46e-3)	<b>7.9435e-1(6.23e-3)</b>	
	5000	2.5260e-1(3.96e-4)	0.0000e+0(0.00e+0)	0.0000e+0(0.00e+0)	1.9031e-1(5.38e-4)	2.2020e-1(1.59e-3)	<b>7.7582e-1(6.76e-3)</b>	
		+/-/=	0/44/1	0/45/0	1/43/1	4/37/4	2/41/2	-

HV 值,表明其总体上获得仅次于 LMOEA-DS 的性能.究其原因,IM-MOEA/D 采用  $k$ -means 和基于分解的选择策略改善了解群的收敛性能,在一定程度上利于重叠相关的多模问题的优化.而 MOEA/DVA、LMEA 和 LMOCSSO 在全部测试例中无一能获得最佳的 IGD 值或 HV 值.总体上,实验 6 表明 LSMOEA/HS 在 3-目标 LSMOP 测试问题上获得了显著较优的性能.究其原因,LSMOEA/HS 采用黄金分层分组方法对变量进行分组简单而且有效,利用基于组的变量相关性检测方法不仅节省了部分

计算资源而且还能有效地划分收敛性子组.两种策略在算法的不同阶段实施并相互协同,有效地平衡了算法的收敛性和多样性.

**实验 7.** 为更直观地展示 LSMOEA/HS 与各对比算法在处理 3-目标 LSMOP 问题的性能表现,图 6 列出了各算法在 3-目标 1000 维的 LSMOP1、LSMOP4、LSMOP5 和 LSMOP9 测试实例上 IGD 值变化曲线.

从图 6 可知,各算法在 3-目标测试实例上获得的 IGD 变化曲线与其在 2-目标测试实例上大体相

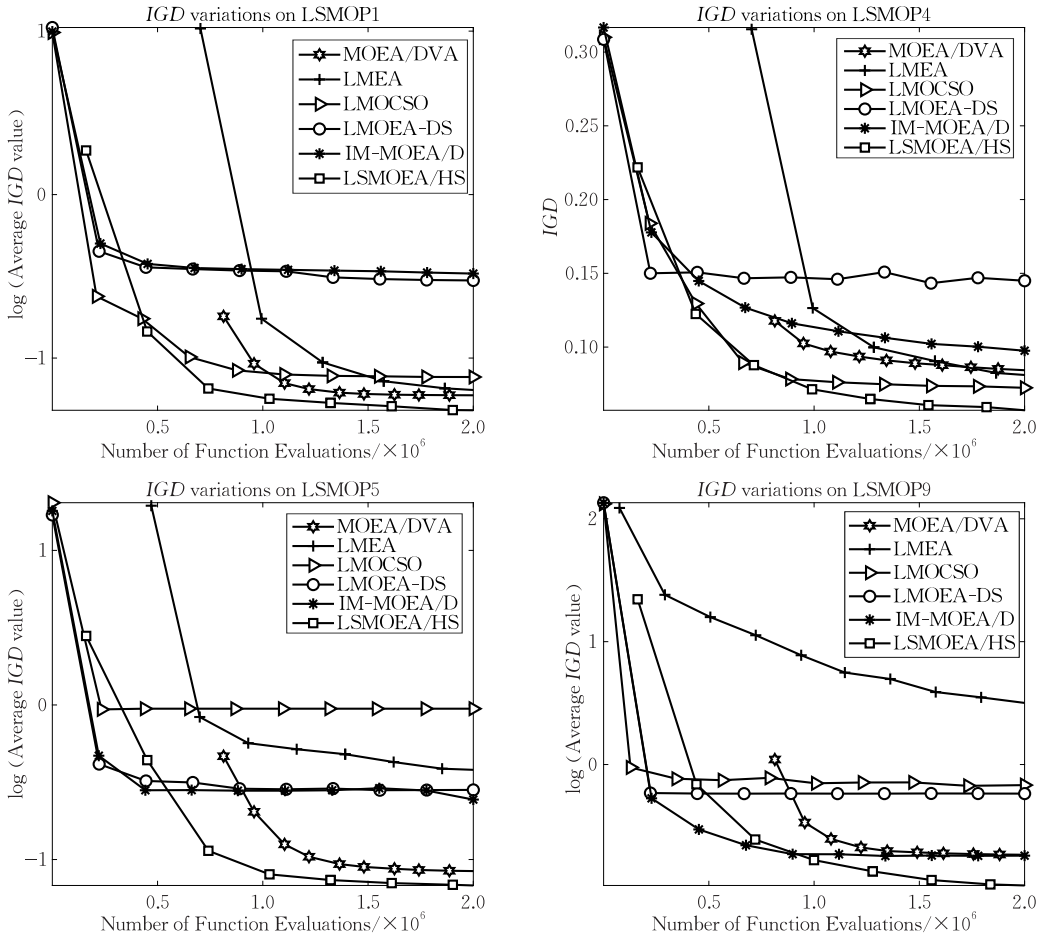


图6 各算法在3-目标1000维LSMOP1、LSMOP4、LSMOP5和LSMOP9测试实例上进行30次独立运行所获得的平均IGD值曲线

似. 差异较大的是, LSMOEA/HS在3-目标LSMOP9上获得的IGD曲线下降的速度以及最终的IGD值均不及2-目标LSMOP9(见图4). 究其原因, 3-目标LSMOP9的PF不规则, 中间存在很多断裂带, 且断裂带的数目要明显多于2-目标的实例, 因而使得采用混合策略的LSMOEA/HS在收敛速度和寻优的精度上有所下降.

**实验8.** 为进一步展示LSMOEA/HS与各对比算法在处理3-目标LSMOP问题时在目标空间的表现, 图7给出各算法在3-目标1000维的LSMOP1、LSMOP4、LSMOP5和LSMOP9测试实例上运行结果与真实PF的对比图, 并通过局部放大对细节进行展示.

从图7可以看出, LSMOEA/HS在4个3-目标测试实例上获得的近似PF要明显优于其他算法所获得的结果. 另外, 各算法在3-目标测试实例上的表现与它们在对应的2-目标测试实例上较相似. 但需指出的是, LSMOEA/HS虽然在3-目标LSMOP9上取得了较好的收敛性, 但解群并未覆盖到全部的

PF上, 而且算法在该测试实例上的表现不如它在2-目标LSMOP9上获得的结果, 原因也是由于断裂带增多所致.

## 5 结论

针对现有大规模多目标进化算法的分组方法以及算法性能尚存较大改进空间等不足, 提出一种黄金分层分组方法和基于组的变量相关性检测相混合的大规模多目标进化算法LSMOEA/HS. 该算法利用黄金分层分组方法将大规模决策变量简单且准确地分成收敛性组和多样性组, 运用基于组的变量相关性检测方法高效地检测收敛性变量间的相关性. 本文实验不仅验证了黄金分层分组和基于组的变量相关性检测两种方法的有效性, 而且通过与五种代表性算法一同在LSMOP系列测试问题上进行比较实验, 结果表明本文算法具有显著较优的收敛性和多样性. 因此表明LSMOEA/HS是一种颇具前景的大规模多目标进化算法. 未来将利用更多更困难更复

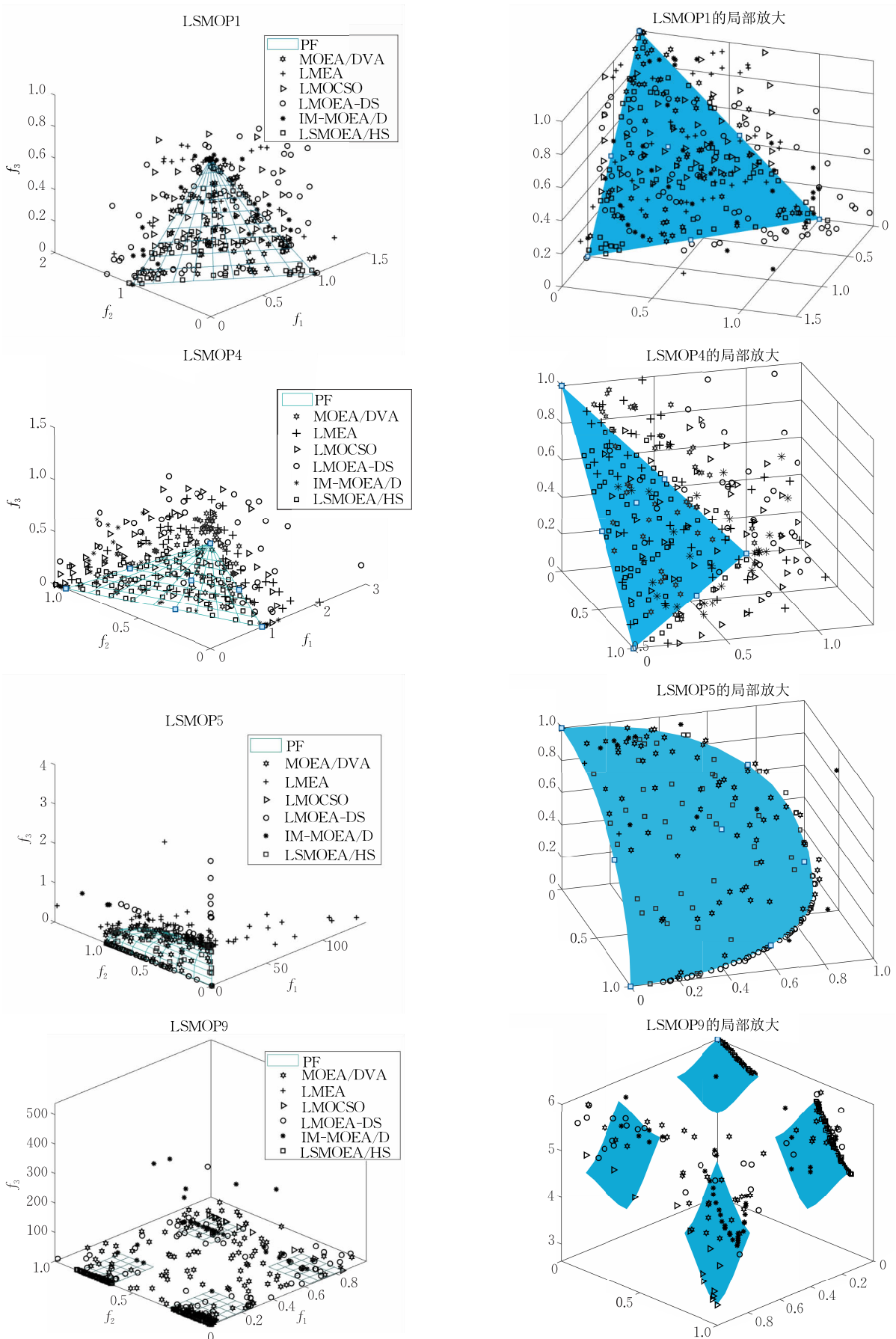


图 7 各算法在 3-目标 1000 维 LSMOP1、LSMOP4、LSMOP5 和 LSMOP9 测试实例上获得的近似 PF 对比图(蓝色部分为真实 PF)

杂的 LSMOP 问题以及现实应用中的一些 LSMOP 问题测试并改进本文算法的性能。

## 参 考 文 献

- [1] Tian Y, Si L, Zhang X, et al. Evolutionary large-scale multi-objective optimization: A survey. *ACM Computing Surveys*, 2021, 54(8): 1-34
- [2] Cao B, Fan S, Zhao J, et al. Quantum-enhanced multiobjective large-scale optimization via parallelism. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2020, 57: 100697
- [3] Hong W J, Yang P, Tang K. Evolutionary computation for large-scale multi-objective optimization: A decade of progresses. *International Journal of Automation and Computing*, 2021, 18(2): 155-169
- [4] Zhang M, Wang L, Guo W, et al. Many-objective evolutionary algorithm based on relative non-dominance matrix. *Information Sciences: An International Journal*, 2021, 547(1): 963-983
- [5] Li D, Guo W, Lerch A, et al. An adaptive particle swarm optimizer with decoupled exploration and exploitation for large scale optimization. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2021, 60(7): 100789
- [6] Ji J, Zhao J, Lin Q, et al. Competitive decomposition-based multiobjective architecture search for the dendritic neural model. *IEEE Transactions on Cybernetics*, DOI:10.1109/TCYB.2022.3165374
- [7] Zille H, Ishibuchi H, Mostaghim S, et al. Weighted optimization framework for large-scale multi-objective optimization// *Proceedings of the 2016 on Genetic and Evolutionary Computation Conference Companion*. Denver Colorado, USA, 2016: 83-84
- [8] Liang Zheng-Ping, Liu Cheng, Wang Zhi-Qiang, et al. Large-scale multi-objective optimization algorithm based on archive and weight extension. *Chinese Journal of Computers*, 2022, 45(5): 951-971(in Chinese)  
(梁正平, 刘程, 王志强等. 基于存档和权值扩展的大规模多目标优化算法. *计算机学报*, 2022, 45(5): 951-971)
- [9] Tian Y, Lu C, Zhang X, et al. Solving large-scale multiobjective optimization problems with sparse optimal solutions via unsupervised neural networks. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2021, 51(6): 3115-3128
- [10] Tian Y, Lu C, Zhang X, et al. A pattern mining-based evolutionary algorithm for large-scale sparse multiobjective optimization problems. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(7): 6784-6797
- [11] Tian Y, Zheng X, Zhang X, et al. Efficient large-scale multiobjective optimization based on a competitive swarm optimizer. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2019, 50(8): 3696-3708
- [12] Liu S, Li J, Lin Q, et al. Learning to accelerate evolutionary search for large-scale multiobjective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2022, 27(1): 67-81
- [13] Ma X, Liu F, Qi Y, et al. A multi-objective evolutionary algorithm based on decision variable analyses for multi-objective optimization problems with large-scale variables. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2016, 20(2): 275-298
- [14] Zhang X, Tian Y, Cheng R, et al. A decision variable clustering-based evolutionary algorithm for large-scale many-objective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2018, 22(99): 97-112
- [15] Qin S, Sun C, Jin Y, et al. Large-scale evolutionary multiobjective optimization assisted by directed sampling. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2021, 25(4): 724-738
- [16] Lucas R C, Aluizio F R. IM-MOEA/D: An inverse modeling multiobjective evolutionary algorithm based on decomposition// *Proceedings of the 2021 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics*. Melbourne, Australia, 2021: 462-467
- [17] Cheng R, Jin Y, Olhofer M, et al. Test problems for large-scale multiobjective and many-objective optimization. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2017, 47(12): 4108-4121
- [18] Xie Cheng-Wang, Yu Wei-Wei, Guo Hua, et al. DAV-MOEA: A many-objective evolutionary algorithm adopting dynamic angle vector based dominance relation. *Chinese Journal of Computers*, 2022, 45(2): 317-333(in Chinese)  
(谢承旺, 余伟伟, 郭华等. DAV-MOEA: 一种采用动态角度向量支配关系的高维多目标进化算法. *计算机学报*, 2022, 45(2): 317-333)
- [19] While L, Hingston P, Barone L, et al. A faster algorithm for calculating hypervolume. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, 10(1): 29-38
- [20] Liu R, Liu J, Li Y, et al. A random dynamic grouping based weight optimization framework for large-scale multi-objective optimization problems. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2020, 55: 100684
- [21] Cao B, Zhao J, Gu Y, et al. Applying graph-based differential grouping for multiobjective large-scale optimization. *Swarm and Evolutionary Computation*, 2020, 53(3): 100626
- [22] Liu S, Lin Q, Tian Y, et al. A variable importance-based differential evolution for large-scale multiobjective optimization. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, 52(12): 13048-13062
- [23] He C, Li L, Tian Y, et al. Accelerating large-scale multiobjective optimization via problem reformulation. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2019, 23(6): 949-961
- [24] Zou J, Xu Y, Yang S, et al. A fuzzy decision variables framework for large-scale multiobjective optimization. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, DOI:10.1109/TEVC.2021.3118593
- [25] Qian H, Yu Y. Solving high-dimensional multi-objective optimization problems with low effective dimensions// *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. San Francisco, USA, 2017: 875-881

- [26] Zhang Y, Wang G, Li K, et al. Enhancing MOEA/D with information feedback models for large-scale many-objective optimization. *Information Sciences*, 2020, 522: 1-16
- [27] Tian Y, Zhang X, Wang C, et al. An evolutionary algorithm for large-scale sparse multi-objective optimization problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2020, 24(2): 380-393
- [28] Chen H, Cheng R, Wen J, et al. Solving large-scale many-objective optimization problems by covariance matrix adaptation evolution strategy with scalable small subpopulation. *Information Sciences*, 2020, 509: 457-469
- [29] Zhang Q, Zhou A, Zhao S, et al. Multiobjective optimization test instances for the CEC 2009 special session and competition. *Mechanical Engineering*(New York, USA; 1919), 2008
- [30] Yu Wei-Wei, Xie Cheng-Wang, Bi Ying-Zhou, et al. Many-objective particle swarm optimization based on adaptive fuzzy dominance. *Acta Automatica Sinica*, 2018, 44(12): 2278-2289(in Chinese)  
(余伟伟, 谢承旺, 闭应洲等. 一种基于自适应模糊支配的高维多目标粒子群算法. *自动化学报*, 2018, 44(12): 2278-2289)
- [31] Huband S, Hingston P, Barone L, et al. A review of multiobjective test problems and a scalable test problem toolkit. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2006, 10(5): 477-506
- [32] Hemphill J F. Interpreting the magnitudes of correlation coefficients. *American Psychologist*, 2003, 58(1): 78-79
- [33] Tian Y, Cheng R, Zhang X, et al. PlatEMO: A MATLAB platform for evolutionary multi-objective optimization. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, 2017, 12(4): 73-87



**XIE Cheng-Wang**, Ph. D., professor. His current research interest is intelligent computing.

**PAN Jia-Min**, M. S. candidate. Her research interest is

intelligent computation.

**GUO Hua**, M. S. Her research interest is intelligent computation.

**WANG Dong-Mei**, Ph. D., lecturer. Her research interests include artificial intelligence, and computer immunity.

**FU Shi-Wei**, M. S. candidate. His research interest is intelligent computation.

## Background

There exist a variety of optimization problems containing multiple objectives and a large number of decision variables (LSMOPs) to be optimized in many scientific and engineering areas. Due to the conflict between different objectives and the huge search space, the performance of the existing large-scale multi-objective optimization algorithms still has a large room for improvement. Based on this, some large-scale multi-objective evolutionary algorithms (LSMOEAs) are developed to solve LSMOPs. The existing LSMOEAs can be roughly divided into three categories, i. e., decision variable grouping, decision space reduction, novel search strategy. The first group of methods is implemented through decision variable classification, which can reduce the scale of the problem to a certain extent. But the sub-problems decomposed may still be large-scale as the number of classified variable groups usually is not big enough. The second group of approaches usually assign a single weight to multiple decision variables, which limits the corresponding search scope in the original decision

space and makes it difficult to guarantee the quality of the final solution. To improve the performance of LSMOEAs, this paper proposes a large-scale multi-objective evolutionary algorithm adopting hybrid strategies (LSMOEA/HS) to balance the search efficiency and quality. The comparison study of LMOEA/HS and other five state-of-the-art algorithms on the latest benchmark LSMOPs shows that LMOEA/HS has a significant advantage of performance in terms of convergence and diversity in solving LSMOPs.

Our research team has been working in the field of swarm intelligence optimization for several years, and has published a series of algorithms in some high quality journals, such as SWEVO and *Information Sciences*, on multi-objective and many-objective optimization. This work was supported in part by the National Natural Science Foundation of China under Grant No. 61763010, in part by the Natural Science Foundation of Guangxi under Grant No. 2021GXNSFAA075011.